ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA

APUNTES DE MECÁNICA

APLICADA Á LAS CONSTRUCCIONES.

— 1910. —

MECÁNICA APLICADA Á LAS CONSTRUCCIONES.

1. La Mecánica aplicada á las construcciones tiene por objeto estudiar la forma, disposición y dimensiones convenientes al conjunto y á cada elemento de una construcción proyectada, para que esta pueda realizarse y subsistir bajo la acción de las fuerzas que han de actuar sobre ella.

2. Estas fuerzas pueden ser de dos clases: unas exteriores, como el peso de los materiales, las sobrecargas permanentes ó accidentales, etc; y otras que se llaman interiores, porque se desarrollan en lo interior de los cuerpos naturales que forman la construcción. Hay, pues, que considerar dos sistemas de fuerzas, uno exterior y otro interior.

Las condiciones de equilibrio que deben guardar las fuerzas comprendidas en el primer sistema constituyen un problema de Estática, el cual se resuelve como si los cuerpos naturales que se emplean en la construcción fuesen sólidos invariables. El conocimiento de las fuerzas del segundo sistema y el de la deformación que se produce en estos sólidos naturales es el fin que se propone obtener el curso de Resistencia de materiales.

Una vez conocido el valor de estas fuerzas locales se pue-

de dimensionar y dar forma conveniente á los elementos en que dichas fuerzas se desarrollan, de manera que las intensidades de estas fuerzas no pasen de cierto límite.

3. De lo dicho resulta, que si la construcción proyectada se ha de realizar, es preciso resolver dos problemas de Estática:

1º Uno entre fuerzas exteriores solamente, llamado de Estabilidad de la construcción.

2º Otro entre fuerzas exteriores é interiores, que se llaman de Resistencia de materiales.

El primero relaciona el curso de Mecánica aplicada á las construcciones con la Mecánica racional, y el segundo con la Física experimental á fin de investigar las leyes que rigen á las fuerzas interiores y á las deformaciones de los cuerpos. Estos trabajos han servido para fundar hipótesis que con el auxilio de las leyes de la Mecánica han formado las Teorias de la resistencia de materiales. Tiene por tanto el estudio del curso una parte teórica y otra experimental: la primera se funda en la Mecánica racional, y la segunda en los experimentos que se refieren á la deformación y fractura de los materiales, de cuyos experimentos llegamos á deducir ciertas cantidades de diversas especies llamadas coeficientes.

4. Las fuerzas que hemos de considerar en el curso son

1º Fuerzas exteriores { que actuan sobre la masa de un cuerpo
que actuan sobre la superficie de un cuerpo.

2º Fuerzas interiores { que se engendran por las primeras en el interior de los cuerpos.

3º Fuerzas repartidas { que son resultantes de otras elementales cuyos puntos de aplicación se suceden continuamente, formando un volumen conocido ó una superficie determinada.

Consideremos una fuerza P repartida sobre una superficie cualquiera Ω es decir, una fuerza cuyas distintas componentes tengan sus puntos de aplicación en dicha superficie Ω. Sea ω un elemento muy pequeño de esta superficie, y admitamos, (en atención á lo reducido de este elemento) que todas las componentes distribuidas sobre ω tienen el mismo valor, son paralelas y su resultante P_e vale la suma de ellas.

Dividiendo la intensidad de P_e, expresada en Kilógramos, por la superficie ω ocupada por las componentes de P_e, el valor numérico de este cociente será el número de Kilógramos que tocarán repartirse sobre la unidad de superficie adoptada para medir el area ω. Se llama á

este cociente fuerza repartida por unidad superficial, ó simplemente fuerza por unidad de superficie. La designaremos por la letra R.

Podremos, pues, escribir $\frac{P_e}{\omega} = R = f(x, y, z)$, representando por esta función el valor de la fuerza unitaria R para un punto (x, y, z) del espacio, en cuyo alrededor tomamos la superficie plana elemental ω.

Supongamos ahora que la superficie Ω sea plana y que las n fuerzas elementales P_e sean paralelas. La resultante P valdrá

$$P = \Sigma_0^n P_e = \Sigma_0^n p\,\omega = \Sigma_0^n \omega f(x y).$$

La $f(x y) = R$ puede representar una superficie (S) cuyos puntos serian los extremos de las ordenadas R levantadas normalmente á Ω. Si admitimos que $f(x y) = Ax + By + C$, la superficie (S) seria un plano que tendria por ecuación

$$R = Ax + By + C.$$

en la cual A, B y C representan constantes que nos darian á conocer la posición del plano S respecto al plano de Ω, que es el de las $x y$. Este plano S fijaría la ley geométrica de repartición de la fuerza P sobre dicha superficie Ω.

Cuando A y B fuesen cero, el valor de R, y por tanto el de P_e, seria constante, luego la repartición de P se haria en este caso de un modo uniforme, y los planos S y Ω serian paralelos.

4.° Fuerzas aisladas. *Cuando la superficie Ω en que se dis-*

tribuye una fuerza es muy pequeña, se supone que aquella está aplicada á un punto y se la llama fuerza aislada.

5º En razón á sus efectos se denominan las fuerzas { de compresión / de traccion ó extensión / cortantes ó tangenciales.

Deformación. Se llama deformación la modificación que en el volúmen ó en la figura de un cuerpo, ó en ambos á la vez, producen las fuerzas que se les aplican.

Rigidez. Los sólidos naturales que utilizamos se deforman y rompen, con resistencia variable, bajo la acción de las fuerzas exteriores. La facultad de resistir más ó menos á dichas deformaciones se denomina rigidez.

Elasticidad. Siendo la elasticidad la propiedad física que tienen los cuerpos de recobrar sus formas y dimensiones primitivas cuando cesan de obrar las fuerzas que produjeron la deformación, designaremos con el nombre de fuerzas elásticas las de atracción ó repulsión desarrolladas en el interior del cuerpo por la acción de las exteriores y que tienden á borrar la deformación producida por dichas fuerzas exteriores cuando estas dejan de ejercer su acción. Las fuerzas elásticas ó interiores, son fuerzas repartidas que se refieren para medirlas á la superficie en que se reparten $= R = \frac{P_e}{\omega}$.

Entendemos por deformaciones permanentes las que subsis-

ten aun cuando las fuerzas exteriores que las han producido dejen de obrar, y por deformaciones elásticas las que desaparecen con las fuerzas. Cuando un cuerpo recobra en un todo su forma y volumen primitivos al cesar las fuerzas, se dice que su elasticidad es perfecta, y en el caso contrario, el cuerpo será imperfectamente elástico: en todo caso la elasticidad de volumen es mucho más perfecta que la de figura, pero en tanto que las deformaciones sean pequeñas en un sólido material y no pasen de un límite variable con su naturaleza, puede este considerarse como perfectamente elástico.

Un sólido prismático es comparable á un sistema de discos (Marvá - Lám. 1ª Fig. 4.) que representan las secciones transversales del cuerpo, unidas por resortes cuya elasticidad á de sustituir á las fuerzas moleculares. Si sobre el sistema no obra fuerza alguna, los resortes no funcionan, pero si una fuerza P tiende á separar ó á acercar las dos bases A y B, suponiendo fija una de ellas, los resortes, alargándose ó acercándose, originarán las fuerzas elásticas que se oponen á la deformación.

6. Supongamos un prisma ó varilla de longitud L, cuya seccion transversal sea ω, fijo por un extremo y sometido en sentido de su eje á una fuerza P de tracción que produce un alargamiento l. Experimentalmente se de-

muestra que dentro de ciertos límites variables con el material, $\frac{P}{\omega}$ y $\frac{l}{L}$ dan una relación constante, de manera que

$$\frac{\frac{P}{\omega}}{\frac{l}{L}}=E$$

Esta constante se llama coeficiente de elasticidad longitudinal ó simplemente coeficiente de elasticidad, y se define, como vemos, por la relación entre la fuerza por unidad superficial de sección transversal y la deformación, (acortamiento ó alargamiento) por unidad de longitud, pudiendo variar las dimensiones transversales del sólido.

Toda deformación longitudinal de una barra va acompañada de deformaciones transversales; los alargamientos producen contracciones de la sección transversal, y los acortamientos originan dilataciones ó ensanchamientos laterales.

En lugar de suponer, como hemos hecho, que las secciones del prisma se mueven paralelamente á sí mismas en sentido del eje para producir la deformación longitudinal l, consideremos el caso en que la traslación de una sección se efectúa tambien paralelamente á su dirección pero en sentido transversal. Es dificil de comprobar directamente por experimentos cual sea la relación entre la causa y el efecto, puesto que el fenómeno es bien complicado, pero, por analogía con el caso

anterior, puede admitirse que aquella relación sea constante dentro de ciertos límites. Sean AB, A_1B_1 dos secciones transversales muy próximas cuya distancia AA_1 (Fig. 1) llamamos L.

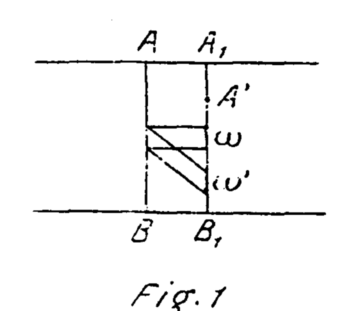


Fig. 1

Admitamos que A_1B_1 resbale en su plano respecto á AB, supuesto fijo, una cantidad $A_1A' = \gamma$, que es igual para todos los puntos. El elemento superficial ω vendrá á ω', y tenderá, en virtud de la elasticidad, á ocupar su primera posición. La fuerza que este elemento desarrolla con este fin será proporcional á ω y función, además, del resbalamiento relativo $\frac{\gamma}{L}$. Luego se puede escribir

$$\frac{\frac{P}{\omega}}{\frac{\gamma}{L}} = G.$$

La relación G es constante y se la llama coeficiente de elasticidad transversal.

Experimentalmente se comprueba para los materiales de construcción que $\frac{G}{E} = \frac{1}{3}$.

7.- Un sólido conserva su elasticidad perfecta en tanto que las deformaciones lineales no excedan de un cierto límite i; este periodo se llama elástico por dicha razón, y en él se verifica la proporcionalidad entre las fuerzas y las deformaciones. La mayor fuerza P que se puede aplicar al cuerpo sin que se altere su elasticidad se llama fuerza limite de elasticidad, y es una fuerza

por unidad superficial tal que la inmediata superior produce ya deformaciones permanentes. Si llamamos D á esa fuerza límite, tendremos $E = \frac{D}{i}$.

A partir de la fuerza límite de elasticidad D las deformaciones, ya permanentes, crecen más rápidamente que las fuerzas, de modo que

$$E > \frac{P_0}{i_0} > \frac{P_1}{i_1} > \frac{P_2}{i_2} > \cdots\cdots$$

si en este periodo continúa aumentando la fuerza P sobreviene la fractura del sólido.

La rigidez se mide por el valor del coeficiente de elasticidad E, pues á igual valor de la fuerza P la deformación i será menor en los cuerpos más rígidos ó menos deformables. La medida de la resistencia de un sólido se conoce por la mayor fuerza P que puede soportar sin llegar á la fractura.

8. Los sólidos geométricos que considera la Mecánica racional son cuerpos indeformables, perfectamente duros y lisos, mientras que los existentes en la naturaleza se deforman y rompen bajo la acción de las fuerzas, son imperfectamente duros y lisos, y dan lugar, por tanto, á fuerzas de rozamiento al moverse á lo largo de una superficie común.

Tales fuerzas pasivas son favorables á la estabilidad de las construcciones, oponiéndose al movimiento de las partes en contacto. Siendo la fuerza F del rozamiento

proporcional á la presión P ejercida en la superficie de contacto. la relación $\frac{F}{P}=f$ dá el coeficiente de rozamiento, cantidad que depende solo del material.

9. Los diferentes elementos ó partes de una construcción se disponen convenientemente para constituir su conjunto.

Cuando tales elementos tienen sección transversal de pequeñas dimensiones respecto á su longitud reciben el nombre de piezas prismáticas, pudiendo ser de forma rectilínea ó curva, y de sección constante ó gradualmente variable, con tal que en este caso la porción de pieza comprendida entre dos secciones transversales, infinitamente próximas, pueda considerarse sin error sensible como un prisma recto de bases iguales y paralelas.

10. En la Mecánica aplicada ha de subsistir la estabilidad de un conjunto aún cuando se varíe accidentalmente la posición y magnitud de las fuerzas exteriores; siendo por tanto inadmisible el equilibrio extricto de la Mecánica racional, alterable por una pequeña modificación en la dirección ó intensidad de una cualquiera de las fuerzas. Las condiciones de equilibrio en una construcción han de quedar satisfechas, tanto en el conjunto como en cada uno de sus elementos, aunque las fuerzas exteriores que sobre estos obran varien de posición ó magnitud. Estas fuerzas son el peso propio, las cargas ó empujes, y las reacciones de

los apoyos ó de las partes contiguas.

Constantes específicas: definiciones.- Peso específico.- Coeficiente de elasticidad.- Limite de elasticidad.- Carga de fractura.- Coeficiente de fractura, de trabajo y de seguridad. *(Véase Marvá, nºˢ 43 á 49).* - Idea general de las máquinas que se emplean para estudiar las deformaciones y fracturas por extensión. *(V. Marvá, n.º 50).*

Ensayo á la tracción de una barra de acero dulce.- *Consideremos una barra de este material, sometida en una máquina de ensayo, á esfuerzos de tracción gradualmente crecientes.*

Llamemos

L *á la longitud de la barra.*

ω *al área de su seccion transversal.*

P *á la fuerza de tracción variable, que tiene por linea de acción el eje del prisma.*

l *al alargamiento que va sufriendo la barra según varia la intensidad de P.*

$\frac{P}{\omega}=p$ *la tracción por unidad de superficie.*

$\frac{l}{L}=i$ *el alargamiento por unidad de longitud.*

Representemos gráficamente (Fig.2) los diversos resul-

tados que obtengamos en el experimento de la barra de ensayo.

A este fin se llevan sobre una linea horizontal los valores de i, partiendo del origen O, por medio de una escala convenida, y en sentido normal á partir del eje OO; los de p

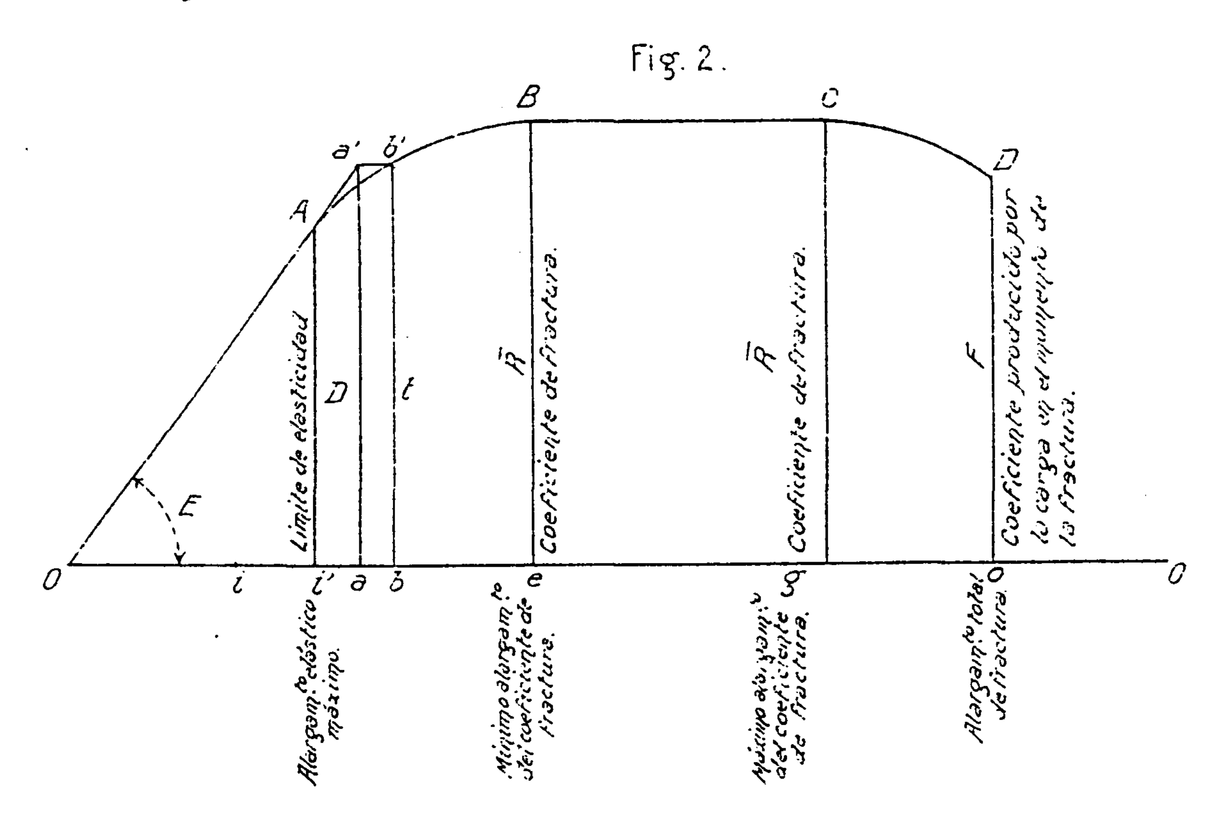


Fig. 2.

Acero muy dulce {
i' = 0,0009 ó 0,09 — D = 18 K^s. por m/m — E = 20.000 K^s por m/m.
e = 12 .... $\bar{R}$ = 35
g = 31 .... id.
o = 35 .... F = 30

segun otra escala. El lugar geométrico así obtenido pone de manifiesto las variaciones que van tomando p é i desde que se inicia la tracción hasta que se rompe la pieza. Este lugar geométrico comprende cuatro partes que corresponden á otros cuatro periodos.

1.er periodo. Se llama tambien al primer periodo periodo elástico por cuanto las deformaciones o i observadas se borran si

cesa la fuerza P de tracción. Comprende el triángulo O i'A, y durante todo él son constantes las relaciones entre p é i. El coeficiente angular de la recta OA será el coeficiente E, que hemos llamado de elasticidad.

Nótese bien que i es un valor puramente numérico, y que, por tanto, E y P deben ser de la misma naturaleza, es decir, una fuerza en Kilógramos dividida por una superficie expresada en metros, centímetros ó milímetros cuadrados. Además, como este valor de i es muy pequeño, el de E será muy grande con relación á p. Así, por ejemplo, en el acero, alcanzaría p. un valor máximo de 18 á 20 Kgs por m/m, y el de E sería de 20.000 Kgs para la misma unidad de superficie, ó sea mil veces mayor que p.

El volumen del prisma sufre poca variación, luego al aumento de longitud que recibe debe corresponder necesariamente una contracción transversal en su sección recta, para que aquel volumen no cambie.

Este periodo se limita por la ordenada D y la abcisa i', ó sea por la carga límite de elasticidad y el alargamiento elástico máximo.

2º periodo. Se le llama tambien periodo de ductilidad. Los alargamientos que se observan desaparecen en parte solamente si la fuerza cesa de obrar; quedando una deformación permanente. Suponiendo que ab sea la deformación

producida por bb', la experiencia nos prueba que suprimiendo bb' desaparece el alargamiento oa y queda como permanente el ab. Esta parte oa que se borra es la deformación elástica que corresponde á la fuerza bb' si el primer periodo continuara para la barra después del punto A.

Comprende este periodo desde el punto A hasta el B, y se caracteriza por crecer i más rápidamente que p. Así

$$E = \frac{D}{i'} > \frac{bb'}{ob} > \frac{eB}{oe}$$

Limitan este periodo los valores de D é i', la abcisa oe y la ordenada eB. Se distingue la abcisa por la letra e, y la ordenada por la $\bar{R}$, llamandose á la primera minimo alargamiento del coeficiente de fractura, y á la segunda coeficiente de fractura.

Las contracciones transversales continúan al mismo tiempo que los alargamientos, y son en parte permanentes.

Si después de llevar la barra dentro del segundo periodo de manera que las cargas p que recibe sean poco mayores que D, se la somete de nuevo á esfuerzos crecientes empezando desde cero, aquella se conduce como si fuera de material distinto. Conserva el mismo valor para E, varia poco el limite D, pero aumenta su coeficiente de fractura y disminuye el valor de o en el alargamiento permanente que llevó la barra al nuevo ensayo.

3er periodo. Su caracter geométrico es la invariabilidad de

las ordenadas durante el crecimiento de las abcisas, y se expresa gráficamente este periodo por la recta BC paralela al eje OO. El caracter mecánico se manifiesta en que con un valor de $p=\bar{R}$, constante é igual al máximo del periodo anterior continúan las deformaciones. La abcisa del punto C se designa por la letra g, y se la llama máximo alargamiento del coeficiente de fractura.

Bajo la acción de la fuerza p por unidad superficial, el alargamiento, en este periodo, se localiza en la parte central de la longitud de la barra, mientras que el resto de ella conserva el adquirido en los anteriores. Este alargamiento localizado da lugar á una gran contracción transversal ó estrechamiento de sección, y empieza á formarse lo que se llama el huso (Marvá, lám.ª 2.ª fig. 2). Aunque entonces deja la pieza de ser prismática, continuaremos refiriendo á la sección primitiva ω el valor de P para la determinación de p, siendo como antes $p=\frac{P}{\omega}$.

Siendo ω' el área de garganta en el huso, la relación $\frac{\omega-\omega'}{\omega}$, denominada coeficiente de contraccion, mide el estrechamiento máximo de dicha sección, refiriéndole á la unidad del área primitiva.

Durante este periodo la deformación de las generatrices de la barra es visible, y para percibir la de las secciones rectas se trazan en la superficie del prisma

líneas normales y paralelas al eje (Marvá, lam.ª 2.ª fig. 3), las cuales se modifican al formarse el huso de la manera que indica la figura. Las secciones planas, situadas fuera del huso, y la de garganta c d, permanecen planas mientras que se trasforman en curvas en el huso las generatrices y secciones rectas, pero continuan siendo normales entre sí. La deformación de las generatrices es tanto mayor cuanto más alejadas se hallan del eje, y las secciones rectas deformadas vuelven la concavidad hacia la garganta, aumentando su curvatura á medida que se aproximan á ella.

4.º periodo, llamado de fractura. *Las ordenadas decrecen al aumentar las abcisas, dando una curva CD con su concavidad hacia el origen. Las deformaciones siguen aumentando aunque se disminuya la fuerza de tracción, pero esa deformación sigue siendo local y llega hasta la fractura. Esta tiene lugar, para un valor Do de p, menor que el Cg del periodo anterior, y es claro, que de haber permanecido constante el valor p = Cg, la fractura se hubiese producido con mayor razón. Entenderemos pues, que el coeficiente de fractura por extensión $\bar{R}$, es el máximo valor de p en los diversos periodos de deformación.*

Periodos de deformación indicados por el manómetro de la máquina de ensayo n.º 62.- *El mercurio del tubo señala los periodos del modo siguiente:*

1er periodo.- El mercurio sube rápidamente en el manómetro.

2º „ - El mercurio continua subiendo pero no ya con velocidad uniforme, sino decreciendo por momentos la velocidad ascensional.

3er „ - El mercurio permanece estacionario ó con ligeras oscilaciones en su nivel.

4º „ - Desciende el mercurio y despues de un corto intervalo cae repentinamente.

Propiedades del material deducidas de los periodos de deformación.- La elasticidad se mide por la gran amplitud del primer periodo respecto á los demás, y por el valor absoluto de los dos términos de la fracción $\frac{D}{l} = E$.

La rigidez se mide por el valor de E y el de O.

La ductilidad ó facultad de admitir alargamientos permanentes, es tanto mayor cuanto mayores sean los alargamientos de los últimos periodos y los estrechamientos de sección en el huso.

La tenacidad depende del valor de $\bar{R}$ y por tanto de la ordenada máxima.

La plasticidad será dada por pequeños valores de E, y por tanto, del límite de la relación $\frac{D}{l}$.

De aquí que el segundo y tercer periodo se llamen generalmente periodos de ductilidad, así como el primero, según dijimos es el de elasticidad, y el último el de fractura.

En la representación que hemos hecho se han considerado como ordenadas las fuerzas p de extensión por unidad de la sección ω, y por abcisas los alargamientos i por unidad de longitud.

Como los valores de i son pequeños se amplifican, para hacerles aparentes en el diagrama, multiplicando por 10 ó por 100 los alargamientos en vez de apreciarlos por unidad de longitud, resultando así para abcisas valores $10i$, $100i$, etc.

Vemos pues, que para llegar á conocer las propiedades mecánicas del material que forma una barra de ensayo, es conveniente determinar las cantidades que limitan los cuatro periodos.

1.er periodo.	- D, i', E	De estas se deducen las propiedades del material, según dijimos.
2º "	- $\bar{R}.e.$	
3.er "	- $\bar{R}.g.$	
4º "	- $F.o$	

Como debe contarse el alargamiento total de fractura.-

El alargamiento total oo se compone de dos partes, una oe y otra eo. La primera parte, $oe = l$, se forma contribuyendo por igual toda la longitud L de la barra, y la segunda, $eo = h$, cediendo solo la longitud H de la región en que se produce el huso.

Considerenos dos barras del mismo metal y sean

L y L' sus longitudes.
l y l' los alargamientos al finalizar el segundo periodo.
h y h' los alargamientos totales producidos en el huso.
ω y ω' la superficie de la sección transversal.
$\frac{P}{\omega}$ y $\frac{P}{\omega'}$ las tracciones iguales que recibe cada barra.

Los alargamientos totales ó de fractura serán respectivamente:

$$l+h \quad y \quad l'+h'$$

que, relacionados con las longitudes primitivas L y L', darán

$$\frac{l+h}{L} \quad y \quad \frac{l'+h'}{L'}$$

Si al comparar entre sí estos dos resultados decimos que han de ser iguales por ser las dos barras del mismo material, tendremos:

$$\frac{l+h}{L} = \frac{l'+h'}{L'} \quad ó \quad \frac{h}{L} = \frac{h'}{L'} \quad ó \text{ bien } \quad \frac{h}{h'} = \frac{L}{L'}$$

es decir, que los alargamientos del huso habrán de ser proporcionales á las longitudes de las barras, respectivas.

Ahora bien, según la ley de semejanza de Marie, podemos admitir que si dos barras son geométricamente semejantes, permanecen siendolo también, tanto en los periodos primero y segundo como en el tercero y en el cuarto, ó sea en el de fractura; luego los alargamientos totales de estas dos barras semejantes, serán proporcionales á sus longitudes. De esto se desprende que para obtener resultados comparables al ensayar dos barras del mismo metal es necesario adoptar una relación constante entre sus longitudes y las dimensiones de los lados homólogos

de sus secciones transversales, ó bien entre aquellas y la raiz cuadrada de estas secciones. Podemos escribir

$$\frac{L}{L'} = \frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega'}}$$

La fábrica de Creusot, en Francia, ha adoptado por barra tipo un cilindro, cuya sección ω' vale dos centímetros cuadrados, y su longitud L' es de diez centímetros. Luego

$$\frac{L}{10} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} \quad ó \quad L^2 = 50.\,\omega$$

Todas las barras en que se verifique esta relación $L^2 = 50.\,\omega$ entre la longitud y el área de la sección transversal, darán alargamientos de fractura comparables.

Preparación de las barras de ensayo.- *Debe procurarse que los herramientas y las operaciones que preparan las barras de ensayo no favorezcan ó perjudiquen las propiedades mecánicas del material. Se obtienen estas barras cortando un trozo del lingote ó barra laminada cuyo material se quiere reconocer, y dándola la forma conveniente para el ensayo por medio de la forja, ó en frio con las herramientas de cortar, acepillar, etc. Debe notarse que si las operaciones de forja no se dirigen bien y el metal* se pasa de fuego *pierde resistencia. El laminado y martillado en frio aumenta su resistencia y disminüye su ductilidad, como consecuencia, según vimos, de estas deformaciones permanentes que recibe. De aquí resulta que las barras de ensayo no deben obtenerse por el forjado*

ni martillado en caliente ó en frio, sino que se las debe sacar de la pieza principal con la tijera, la tajadera ó el torno, procurando despues limar ó acepillar los bordes para destruir la pequeña zona en que la herramienta ha ejercido su acción directa.

Circunstancias que influyen en el resultado de las experiencias.

1º La falta de homogeneidad. Es dificil obtener prismas de ensayo perfectamente homogéneos aun para el mismo material. Varia la resistencia de las piedras al pasar de un banco á otro, y aún dentro del mismo, siendo muy apreciables las diferencias que se notan. En las maderas cambia la resistencia y la elasticidad en sentido transversal ó longitudinal así como del tronco á la parte superior del arbol.

Los resultados del análisis químico y de los ensayos mecánicos son distintos según que el ejemplar de prueba se saque de una ú otra región del lingote. Sin embargo, cuando las piezas están bien trabajadas calorífica y mecánicamente se notan poco estas diferencias.

2º La orientación de esfuerzos. La resistencia y elasticidad de la madera varia según que la fuerza de tracción obre en sentido paralelo, normal ó tangencial á las fibras. Las piedras resisten de distinto modo según que la compresión

es normal ó paralela al lecho de cantera. Por último; en los metales no es lo mismo que la tracción se opere en dirección normal ó paralela al laminado.

3º Forma y dimensiones del prisma. Hemos visto que si los alargamientos totales de fractura han de ser iguales, es preciso que las barras sean geométricamente semejantes; por tanto, la forma de las barras de ensayo ha de cumplir esta condición para poder comparar los resultados obtenidos. Si el ejemplar de ensayo es corto y no puede formarse el huso extendiéndose según debiera sobre la barra, el coeficiente de fractura que se obtiene es mayor que el verdadero. Se comprueba este resultado dando á la barra el perfil longitudinal que indica la figura 3: la fractura es por b.

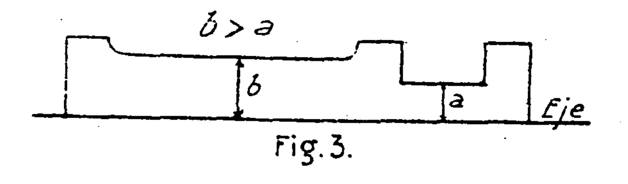
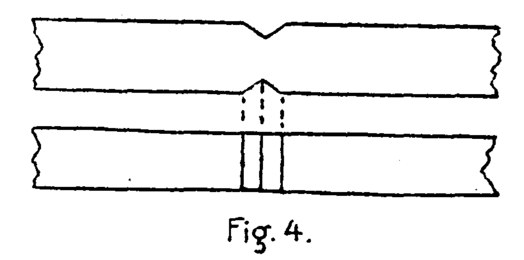


Fig. 3.


Fig. 4.

Aumenta también el coeficiente de fractura si se hace un pequeño rebajo ó entalladura en la seccion de la barra (Fig. 4). Si este rebajo, en forma de V se practica en una barra de sección rectangular:

1º- $\overset{10}{\nabla}_{8}$ en las dos caras correspondientes al lado menor	}	
2º- $\overset{10}{\nabla}_{4}$ en id id id mayor	}	resulta
3º- los dos rebajos anteriores á la vez	}	

que el coeficiente $\bar{R}$ obtenido en el caso 1º $<$ en el 2º $<$ en el 3º

Cualquiera de estos tres coeficientes es mayor que el obtenido en el caso de no haber rebajos.

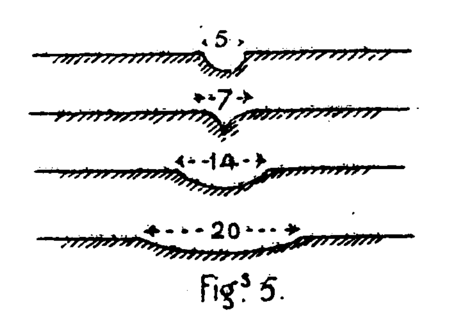


Fig.s 5.

Si los rebajos tienen la forma curva que se indica en las cuatro figuras 5, y se practican en una barra circular de 14 m/m de diametro en la sección de garganta, resulta que el coeficiente $\bar{R}$ > en el 1.° > en el 2.° > en el 3.° > que en el 4.°

Vemos, pues, que estos estrechamientos ejecutados en la sección de un prisma ó barra de ensayo produce aumentos en los valores de

$$\bar{R} \text{ é } i'$$

si se comparan estos entre sí y con los obtenidos en el caso de sección constante é igual á la de garganta.

Cuando aumenta la relacion $\frac{a}{e}$ entre el ancho y el expesor de una sección rectangular disminuye el valor de $\bar{R}$. Es conveniente, por tanto, que la relación $\frac{a}{e}$ difiera poco de la unidad.

4.° Progresión de los esfuerzos. Debe procurarse que los incrementos de la tracción por unidad superficial de la sección recta se sucedan con intervalos de tiempo que permitan medir y anotar los alargamientos i, por lo que no se ha de aumentar la fuerza hasta que su valor anterior haya producido todo su efecto.

5º La temperatura. La temperatura que tenga el material en el momento del ensayo influye en el resultado obtenido especialmente en los metales.

6º Composición química. Esta tiene una gran influencia en el resultado de las pruebas cuando se opera con los metales, como el hierro, el acero, la fundición y las diversas aleaciones que se emplean en el arte de la construcción. La combinación del hierro con distintas proporciones de carbono produce los tres materiales mencionados, que tienen una resistencia y rigidez muy diferentes, y en cada uno de ellos es todavía muy marcada la influencia que ejerce la simple presencia de otros metales ó metaloides. Existen fórmulas empíricas que dan la resistencia y rigidez del material en función de sus componentes químicos, pero solo se les puede conceder muy escaso valor. Además, aunque el análisis químico nos diera á conocer las proporciones exactas de metales y metaloides que entran en la composición del hierro y del acero, por ejemplo, no se podría deducir de aquellas cual sería la tenacidad, resistencia y elasticidad de estos materiales, por cuanto, según vimos, muchas operaciones mecánicas que se practican en frio no alteran la composición química y, sin embargo, modifican las propiedades físicas.

	Π Km^3	E Kmm^2	$\bar{R}'$ Kmm^2	D' Kmm^2	R' Kmm^2	m	i'	O	$\bar{R}$ Kmm^2	D Kmm^2	R Kmm^2
Metales y madera. — Hierro en palastro y barras	7.800	18.000 20.000	30 40	15 20	5 9	4 6 8	0,001	2 18 } %	30 40	15 20	5 9
Acero para construcciones	7.800	20.000 22,000	40 50	22 30	9 12	4 6 8	0,001	18 22 } %	40 50	22 30	9 12
Fundición ordinaria de 2ª fusión	7.500	9.600	50 110	14 24	6 12	8 10	" "	" "	9 15	4 8	2 3
					cm^2						cm^2
....	559	564	2,60 4,00	2.00	40 60 70	6 10	" "	" "	2.48	1.40	40 70
					cm^2						
Piedras — Silíceas	"	"	"	"	50	10	"	"	"	"	"
Calizas y areniscas duras	"	"	"	"	30	10	"	"	"	"	"
Id. id. blandas	"	"	"	"	10	10	"	"	"	"	"
Ladrillo — Duro bien cocido	"	"	"	"	10 15	10 10	" "	" "	" "	" "	" "
Recocho	"	"	"	"	5 7	15 15	" "	" "	" "	" "	" "
Fábricas de — Sillería	2.400 2.700	" "	" "	" "	30 40	" "	" "	" "	" "	" "	" "
Sillarejo	2.100 2.250	" "	" "	" "	14 20	" "	" "	" "	" "	" "	" "
Hormigón	2.300	"	"	"	5	"	"	"	"	"	"
Id. con cemento	2.300	"	"	"	10	"	"	"	"	"	"
Ladrillo con mortero ordinario	1.800	"	"	"	6	"	"	"	"	"	"
Id. con cemento	1.800	"	"	"	10	"	"	"	"	"	"

fractura. Cuando la materia es rígida y homogénea la fractura tiene lugar según una sección recta, con aspecto granular más ó menos pronunciado. Esto ocurre en las piedras, ladrillos, fundición, acero duro, etc., y en las materias dúctiles sino se deja espacio para la formación del huso. Cuando este se forma y la barra es circular, aparecen dos conos, tanto más alargados cuanto mayor es la longitud del huso.

Deformaciones y fractura por compresión.- Máquinas que se emplean.- Dificultades que se presentan en los experimentos de compresión.- Materiales dúctiles y elásticos.- Periodos de deformación.- Dilataciones y ensanchamientos.- Plegamiento de la superficie lateral.- Manera de iniciarse la fractura. Cuerpos rígidos y fibrosos: deformaciones y fractura. *(Véase Marvá nos 80, 81, 82, 83, 86, 87 y 88.)*

Problemas de extensión y compresión simples.- Fórmulas que se emplean y observaciones sobre su uso.- Problemas de resistencia y de deformaciones referentes á piezas prismáticas rectas. *Marvá, nos 185, 186, 187 y 199.- Ejemplos.*

Caso en que una varilla no puede acortarse cuando sufre el descenso de t grados de temperatura. *Se llama coeficiente de dilatación lineal de la varilla á la relacion entre la variación l, que sufre su longitud L por el cambio de un grado y esta longitud. Designando con*

la letra δ dicho coeficiente podremos escribir

$$\delta = \frac{l}{L} = 0{,}000012$$

cuando se trata del hierro.

Si el cambio fuese de τ^o, produciendo una variación l, la nueva relacion $\frac{l}{L}$ seria la anterior δ multiplicada por τ, ó bien

$$\frac{l}{L} = \tau\delta$$

En la fórmula de deformación, $\frac{R}{\frac{l}{L}}$ se puede sustituir $\frac{l}{L}$ por su valor general $\tau\delta$, dependiente de las variaciones τ de temperatura y del material empleado: luego la relación $E = \frac{R}{\tau\delta}$ nos dará á conocer el coeficiente R de trabajo originado en una varilla por la traccion de dos fuerzas P aplicadas á sus extremos con el fin de impedir el acortamiento $l = \tau\delta L$ que tiende á producir en ella una variación de τ^o de temperatura.

El resultado que se obtuviese para R supone que los extremos de la varilla han de permanecer absolutamente fijos, mediante las intensidades de las fuerzas P, y como esta invariabilidad de los extremos no se cumple en la práctica, sino que estos ceden algo, es preciso conocer bien en cada caso hasta que punto se han de considerar fijos los extremos de la varilla, á fin de que el valor deducido para R sea admisible. Asi vemos que un descenso de 30° produciria en una varilla de hie-

rro un coeficiente de trabajo $R = E \times \delta \times 30^{\circ} = 16000 \times 0{,}000012 \times 30^{\circ} = 5{,}76$ Kgs. por $^{m}/_{m}$ suponiendo que sus extremos esten fijos en absoluto. La variación de longitud no consentida será

$$l = 0{,}000012 \times 30^{\circ}.\ L = 0{,}00036.\ L$$

Si esta varilla tuviese, por ejemplo, una longitud $L = 10{,}00$ metros, el valor de l no llegaria á $0^{m}{,}004$, y por tanto cada extremo se habria de considerar fijo si su posición no cambiaba en dos milímetros. La manera que tuviésemos de fijar en obra estos extremos nos daria á conocer si no habrian de ceder esta pequeña cantidad para que pudiera admitirse como exacto el valor 5,76 Kgs. hallado para R.

Aplicaciones de los problemas de extensión y compresión simple.- Cuerdas de cáñamo.- Piezas de madera y barras metálicas.- Cables de alambre. Marvá, n.os 201, 202, 203 y 204.

Relación entre la carga P que puede recibir un cable y su peso p por metro lineal.- Este peso se compone del correspondiente á la longitud (1,00 + a) que tienen los n alambres que forman el metro lineal de cable, y del p' que se refiere al cáñamo. Expresando d' su diámetro en milímetros tenemos

Peso aproximado por metro lineal de cable $= p = \frac{1}{4}\pi . n . d'^2 \times \ldots$

$$\times (1000 + a)\ 0{,}0000078 + p' = 0{,}007\, n\, d'^2$$

Carga que puede soportar el cable (segun vimos): $P = 7{,}07 n d^2$

Luego $\frac{P}{p} = \frac{7{,}07}{0{,}007} = 1000$ próximamente, ó $P = 1000\,p$.

La carga P que puede recibir un cable de sección constante se compone de dos sumandos: uno es el peso P_e que ha de elevar, y otro su peso propio pL.

Por consiguiente puede escribirse

$$P = P_e + pL, \text{ ó bien } P_e = P - pL = P - \frac{P}{1000} \cdot L = P\left(1 - \frac{L}{1000}\right)$$

Esta relación nos dice que $P_e = 0$ cuando $L = 1000$ mt.s, y que por tanto, basta su propio peso para producir en la sección origen el coeficiente de trabajo 9 Kgs. por m/m admitido. Si esto pasa para la longitud de 1.000 mt.s, el coeficiente 9 se convertirá en $5 \times 9 = 45$ Kg.s por m/m cuando la longitud llegue á alcanzar 5.000 metros, y por tanto, el cable se romperá por el solo peso de esta longitud.

Fórmula que dá el espesor de una tuberia de conducción de agua.- Depósitos cilíndricos para agua construidos con palastro.- Espesores de la chapa y del casquete esférico que forma el fondo.- Morvá, n.os 217, 218, 227, 228 y 229.

Pernos.- *Si dos barras rectangulares A y B (Fig. 5) se ensamblan por medio de un perno de manera que la presión producida por la tuerca no permita el resbalamiento de la B sobre la A cuando se tira de cada una en el sentido indicado T-T, el cuerpo del perno no trabajará por esfuerzo cortante. Pero como la presión P que el apriete de la tuerca produce sobre las barras, reacciona sobre el perno, se hallará este sometido á una fuerza de tracción igual á la P, cuyo valor vamos á calcular.*

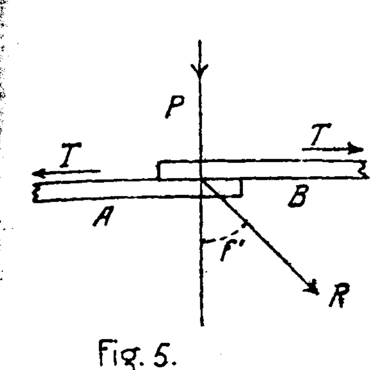


Fig. 5.

Si la barra B estuviese bajo la acción de una fuerza T conocida y no hubiese de resbalar sobre la A, sería preciso que la resultante R de la presión P y de la tracción T formase con P un ángulo menor que el llamado de rozamiento; esta condición se expresaría por la desigualdad

$f' < f$, *ó bien por la igualdad* $f' = \frac{1}{m} f$,

indicando la fracción $\frac{1}{m}$ *la importancia de la desigualdad, ó el grado de seguridad que existirá para que no tenga lugar el resbalamiento que se trata de impedir.*

De la figura 6 se deduce que

$$T = f' P = \frac{1}{m} \cdot f \cdot P$$

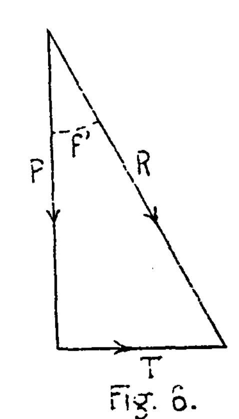


Fig. 6.

luego

$$P = \frac{m}{f} T,$$

que es el caso más frecuente.

Cuerpo del perno.- *Conocido el valor de P, se trata de dimensionar el cuerpo del perno para que resista á la tracción de la fuerza P.*

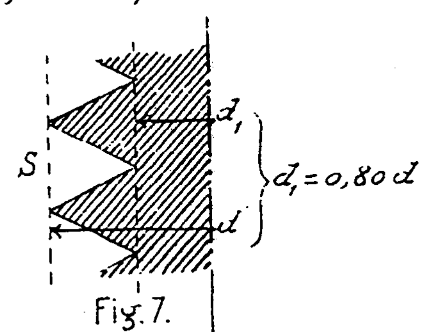


Fig. 7.

Llamemos d al diámetro del cuerpo del perno y d_1 al del núcleo de la parte terrajada. Admitamos que la relación de estos diámetros sea 0,80; la ecuación de resistencia será:

$$P = R\omega = R \cdot \frac{1}{4} \pi d_1^2 = R \pi \frac{\overline{0{,}80\, d^2}}{4} = \frac{1}{2} R \cdot d^2 \quad \begin{cases} \text{para el hierro } R = \text{de } 2 \text{ á } 4\ K\ ^m/m \\ \text{para el acero } R = \text{de } 6 \text{ á } 8\ K\ ^m/m. \end{cases}$$

Altura y diámetro de la cabeza.- *La cabeza del perno puede romperse por desgarramiento según la superficie cilíndrica (cc-c'c') (Fig. 8). Llamando a á la altura de la tuerca, esta superficie valdrá $\pi d . a$; luego la ecuación de resistencia será:*

$$P = R'' \omega = R'' \pi . d . a = \pi . d . a$$

admitiendo que $R'' = 1$ Kg. por $^m/m$.

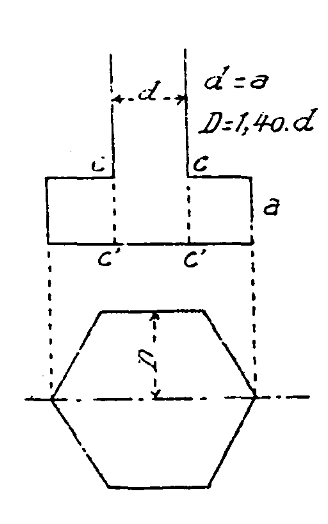


Fig. 8.

Poniendo en lugar de P el valor deducido antes, resulta

$$\frac{1}{2} R . d^2 = \pi . d . a, \; \text{ó} \; d = \frac{2\pi}{R} a.$$

El valor de 2π iguala casi al de R, luego a y d pueden ser iguales, ó a poco menor que d. El diámetro D de la circunferencia inscrita en el exágono que forma la cabeza se dimensiona de manera que la presión por unidad superficial que tenga lugar sobre la corona $(D-d)$ sea, a lo más de 2 Kgs. por $^m/_m$. Escribiremos pues

$$P = \frac{1}{4}\pi(D^2-d^2).\ 2\ \text{Kgs.} = \frac{1}{2}Rd^2$$

de donde

$$D^2-d^2 = \frac{Rd^2}{3,14} = 0,32.\ d^2 R$$

y despejando á D

$$D = d\sqrt{1+0,32\times3} = d\sqrt{1,96} = 1,40\ d$$

Altura y diámetro de la tuerca. - La altura de la tuerca es igual al diámetro d del perno, según práctica seguida por los constructores, y el diámetro D de la circunferencia inscrita es, por término medio igual á $2\ d$.

Caso en que el cuerpo del perno trabaja por esfuerzo cortante. Consideremos ahora el caso en que la tuerca del perno no comprime las dos barras A y B, de manera que solo se opone á su resbalamiento la resistencia que presenta el cuerpo del perno. El estremo de cada barra tiene una cabeza cilíndrica con un orificio circular que recibe al perno. La sec-

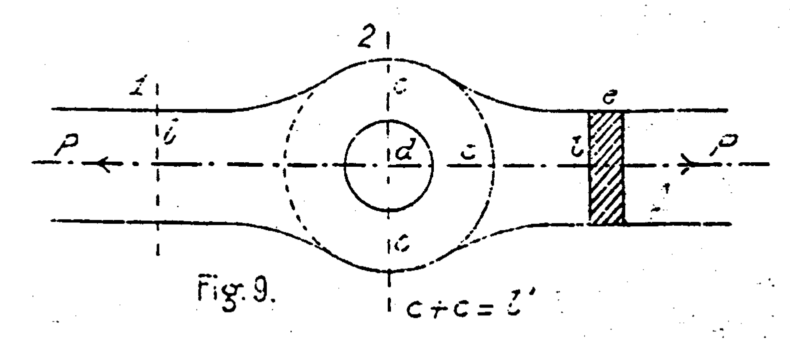


Fig. 9.

ción recta 1 de la barra es $l \times e$, y la 2 nos da una superficie util $l' \times e$.

La dimensión de la sección 1 se obtendrá por la fórmula $P = R.l \times e$ y la de la 2 se obtendría haciendo los espacios $c = \frac{1}{2} l$. Análogamente, la del cuerpo del perno se buscaría por la ecuación $P = R'' \frac{1}{4} \pi d^2$. Pero como la experiencia acredita que la dimensión $c = \frac{1}{2} l$ es deficiente y que el diámetro d del perno, deducido de la ecuación de resistencia, no satisface algunas veces, se ha tratado de buscar, por medio de experimentos concretos, la relación numérica más conveniente de $\frac{e}{l}$, $\frac{d}{l}$, $\frac{l'}{l}$. Los valores extremos y medios admitidos entre otros varios para estas tres relaciones, son, respectivamente, los siguientes:

$l = 1$ .... (Marvá, pág. 275)	$e =$ 0,21	$d =$ 0,67	$l' =$ 1,33
	0,40	1,00	1,50
	1,08	2,00	1,75

Se empieza por determinar la sección $l \times e$, adoptando una de las relaciones $\frac{e}{l}$, y empleando la ecuación $P = R.l \times e$.

De esta deduciremos l y despues el diámetro d y la l' mediante las relaciones que las unen con l, las cuales son las que estan en la misma horizontal del valor adoptado para $\frac{e}{l}$. Por ejemplo: $P = 30000$ Kgs. $= 6.l e = 6 \times 0{,}40\, l^2$, tomando $\frac{e}{l} = 0.40$; de donde $l = \frac{100 \times 1.732}{\sqrt{2.40}} = 112$ m.m. Luego

$$e = 0{,}40 \times 112 = 44{,}80 \text{ m.m.}$$

$$d = 112 \text{ m.m.}$$

$l' = 1,50 \times 112 = 168$ m.m.

$c = \frac{l'}{2} = 84$ m.m.

Algunos adoptan para d un límite inferior $d = l$, pero cuando el valor de P no es muy grande, como ocurre en los tirantes de las armaduras ordinarias, puede llevarse á d hasta $0,66 . l$.

Casos particulares.- Si la barra A, (Fig. 10) se halla comprendida entre otras dos B, se admite que la primera está compuesta de dos espesores, $\frac{1}{2}$ e, y que recibe las cargas $\frac{1}{2} P = P'$

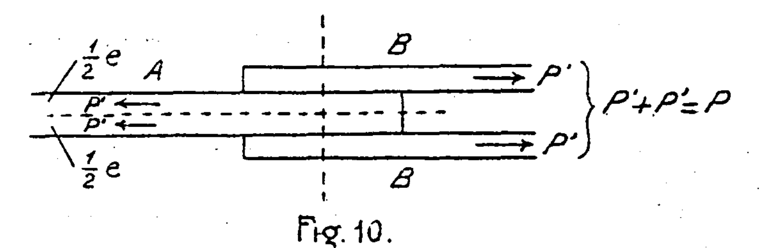


Fig. 10.

Se calcula la barra A, de sección $l \times e$, como la anterior. Para hallar d y l' bastará suponer que sea e la mitad del valor calculado, y buscaremos en la tabla los que convienen dar á las relaciones $\frac{d}{l}$ y $\frac{l'}{l}$ cuando el espesor sea $\frac{1}{2}$ e. Asi, en el ejemplo anterior, dispuesto el ensamble según este caso, adoptaríamos $\frac{1}{2}$ $0,40 = 0,20$ para fijar

$d = 0,67 \times 112 = 15$ y $l' = 1,33 \times 112 = 149$.

Este procedimiento se sigue para calcular los ensambles que indican las figuras nºs 8, 9 y 10, lámina 5ª de Marvá.

En el caso de unir varias barras concurrentes, (fig. 5, Lám. 13) por medio de dos chapas, puede suponerse dibujado en una chapa el cuerpo de una barra, de manera que $l = d$. Admitiendo, además, que $e = 0,40\, l$, la ecuación de re-

sistencia será:

$$\frac{1}{2} P = Rle = R \frac{e^2}{0.40} = 2{,}50\, Re^2,$$

de donde $e = \sqrt{\frac{P}{5R}}$ = grueso de la chapa.

Deduciríamos de este espesor el lado l y el diámetro d.

Rodillos y soportes esféricos. Consideremos un soporte cilíndrico de longitud l comprimido por dos fuerzas P (Fig. 11.) que se reparten por medio de los planos M á lo largo de las generatrices de contacto. Supondremos que la deformación producida en el cilindro solo se extiende desde la generatriz A hasta la A', y que la curva primitiva ADA' se ha convertido en la AcA'. La cuerda AA' corresponde á un arco muy pequeño AA', y por tanto, las distancias de este arco á la línea N, puede admitirse que son iguales al radio r del cilindro.

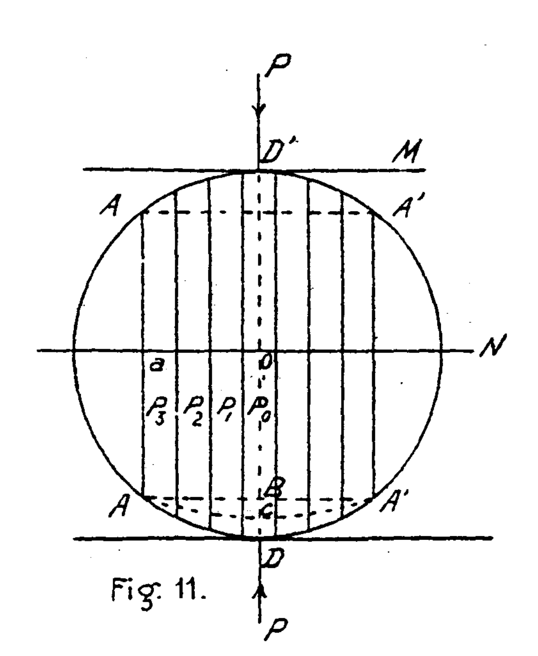


Fig. 11.

Se trata de conocer un límite para el radio del rodillo en función de la carga P y del material que le forma, atendiendo para ello á la deformación supuesta AcA'. Dividamos el prisma $AAA'A'$ en otros n (en la figura son siete) por medio de planos verticales paralelos que disten la longitud a. Cada uno de estos prismas tendrá su base sobre el plano N, y esta medirá el área al del rectángulo correspondiente.

La ordenada y de la curva de deformación AcA' dará para cada prisma el acortamiento supuesto, y este nos indicará el valor de la fuerza P_η capaz de producirle puesto que tenemos $P_\eta = E.a\,l.\frac{y}{r}$.

Este sistema de fuerzas verticales P_η debe equilibrar á la fuerza exterior P: luego

Caso del rodillo. $P\varepsilon E a l \frac{y}{r} = \frac{El}{r} \varepsilon a y = \frac{El}{r}$ (superficie $ACA'BA$)

Si antes de seguir adelante hacemos consideraciones análogas á las anteriores en el caso de ser un soporte esférico, veriamos que el rectángulo $AA' \times l$ se convertiria en un paralèlo de la esfera; que las áreas $a\,l$ serian de la forma elemental ω; y que, por último, la superficie esférica ABA' se habria convertido en otra AcA', cuyas ordenadas y con relación al plano AA' nos expresarian los acortamientos de los prismas elementales ω, y nos darian á conocer el valor de las componentes P_η del sistema exterior que produce este acortamiento: luego

Caso del soporte esférico. $P = \varepsilon E \omega \frac{y}{r} = \frac{E\varepsilon}{r} \omega y = \frac{E}{r}$ (volúmen de $ABA'c$)

Pero { la superficie del segmento ACA' puede valuarse por $\frac{2}{3}\, AA' \times Bc$
el volúmen del casquete AcA' id id id $\pi \overline{AB}^2 \cdot \frac{1}{2} Bc$ }

luego:

Cilindro........... $P = \frac{2}{3} \frac{El}{r} . AA' . Bc$

Esfera.......... $P = \frac{1}{2} \pi \frac{E}{r} . \overline{AB}^2 . Bc$

Ahora bien; la carga por unidad superficial P_η que

sufre cada prisma elemental debe ser menor que el coeficiente de trabajo R' por compresión correspondiente al material del soporte: por lo tanto

$$P_n \leqq R'$$

Pero el mayor de P_n se hallará en el prisma de mayor acortamiento y que es Bc, ó sea en el central; podremos escribir

$$E.\frac{Bc}{r} \leqq R'.$$

y sustituyendo resultará

Cilindro .... $P \leqq \frac{2}{3}\frac{El}{r}.\frac{rR'}{E}.AA' = \frac{2}{3}\,l.\,R'.AA'$

Esfera .... $P \leqq \frac{1}{2}\pi\frac{E}{r}.\frac{rR'}{E}.\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\pi R'.\overline{AB}^2$

Vemos en la figura que

$$AA' = 2AB = 2\sqrt{BD \times BD'} = 2\sqrt{BD(2r-BD)} = 2\sqrt{2r.BD} = 4\sqrt{rBc}$$

Sustituyendo por $BC = \frac{rR'}{E}$, tendremos

$$AA' = 4r\sqrt{\frac{R'}{E}} \qquad y \qquad \overline{AB}^2 = 4r^2\frac{R'}{E};$$

luego

Cilindro.- $P \leqq \frac{8}{3}\,r.R'\sqrt{\frac{R'}{E}}.\,l$, de donde $r \geqq \frac{3}{8}.\frac{P}{R'}\sqrt{\frac{E}{R'}}.\frac{1}{l}$

Esfera.- $P \leqq 2\pi r^2\frac{R'^2}{E}$ " " $r \geqq \sqrt{\frac{EP}{2\pi R'^2}}$

que son los límites inferiores del radio del cilindro ó de la esfera que ha de formar el soporte.

Se deduce de aquí que este límite desciende cuando el material del soporte tiene un gran coeficiente R' de trabajo por compresión, como ocurre en el hierro fundido.

Si tomamos para $\begin{cases} E = 9000 \text{ Kgs. por } m/m \\ R' = 10 \quad id \quad id \end{cases}$ resulta $r = \frac{90}{80}.P\frac{1}{l}$

en milímetros, y como la fracción $\frac{90}{80}$ es casi la unidad, y lo sería elevando algo el valor de R', tenemos, por último $r=\frac{P}{l}$. El límite del radio que conviene dar á un rodillo de fundición de buena calidad, se obtendrá dividiendo la carga P que ha de recibir por su longitud l expresada en milímetros. El cociente nos dará la menor longitud del radio expresada tambien en milímetros.

1.- Aplicación de la estática al estudio de las fuerzas interiores.

Concibamos que á un cuerpo que esté en equilibrio (Fig. 12) bajo la acción de fuerzas cualesquiera, le damos una sección, (generalmente plana) que le divide en dos partes (A) y (B). Se puede separar una de estas partes, por ejemplo la (B), sin alterar el equilibrio de (A) con tal que á las fuerzas aplicadas á esta parte A se añadan otras repartidas sobre toda la superficie de separación: estas fuerzas se llaman las fuerzas elásticas (tensiones ó presiones) ejercidas por la parte (B) sobre la parte (A).

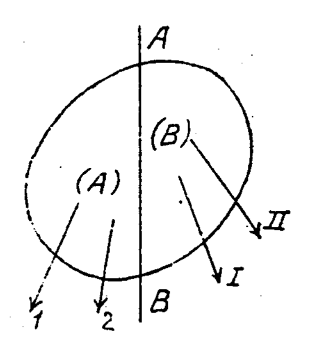


Fig. 12

¿Según que leyes estas fuerzas, que se suceden de una manera continua, están repartidas sobre la superficie de separación? En otros términos: ¿Cual será en cada punto de esta superficie el valor de la presión ó tensión por unidad superficial? Se comprende que la respuesta á esta cuestión debe depender, no solo de las fuerzas exteriores que obran sobre el cuerpo, sino también de la forma y de la naturaleza de este, y que, por esta razón no pudiendo la Estática por si sola resolverla, será esencialmente esta solución del dominio de la teoría de la elasticidad.

Pero la Estática nos enseña que si la parte (A) del cuerpo está en equilibrio, lo estará con mayor razón si la suponemos invariable.

Es, pues, necesario que las fuerzas que solicitan la parte (A), comprendiendo en estas fuerzas las elásticas que proceden de la acción de (B) sobre (A), satisfagan á las condiciones de equilibrio relativas á los sistemas invariables, resultado que se puede enunciar así: Si se componen entre sí las fuerzas exteriores 1, 2, ... que obren sobre una porción cualquiera (A) de un cuerpo como si estas fuerzas actuasen sobre un sistema invariable, se obtendrá una resultante, ó un par resultante, puesto que se supone que dichas fuerzas están en un plano. Esta resultante ó este

par son fuerzas puramente ficticias, que no podrán de ninguna manera reemplazar á las 1, 2, ... de que provienen.

Si del mismo modo se componen las fuerzas elásticas que la parte (A) del cuerpo experimenta por parte de la (B) se obtiene, en la hipótesis de que todo es simétrico con relación al plano que contiene todas las fuerzas exteriores, una fuerza ó un par. Esta fuerza ó este par es igualmente ficticio y no puede reemplazar á las fuerzas elásticas.

Las fuerzas elásticas no estan todas en el plano de simetría, pero á cada fuerza elástica situada á un lado de este plano corresponde otra fuerza simétrica, y las dos, compuestas como si obrasen sobre un sólido invariable, dan una resultante parcial situada en el plano de simetría. No queda, pues, más que componer estas resultantes parciales que están en el mismo plano que las fuerzas exteriores.

Pero la Estática enseña: 1.º que si las fuerzas exteriores 1, 2, ..., compuestas como se acaba de decir, dan una resultante, las fuerzas elásticas dan tambien, necesariamente una resultante, igual y opuesta á la precedente; 2.º que de un modo análogo, si las fuerzas exteriores se componen en un par, sucede necesariamente lo mismo con las fuerzas elásticas, y que, además, este segundo par, es igual y opuesto al primero.

En lo que precede hemos considerado las fuerzas elásticas ejercidas por (B) sobre (A); las ejercidas por (A) sobre (B) les son iguales y opuestas.

Por consiguiente, se puede tambien decir que si en un cuerpo en equilibrio se hace una sección cualquiera que le divida en dos partes (A) y (B) la resultante R_a de las fuerzas exteriores 1, 2, ..., que tienen sus puntos de aplicación en la parte (A), es igual en magnitud, dirección y sentido á la resultante r_a de las fuerzas elásticas que esta parte ejerce sobre la otra (B). El punto en que esta resultante R_a corta á la sección AB (Fig. 12) se llama centro de presión del sistema A.

En el caso particular en que las fuerzas exteriores, que tienen sus puntos de aplicación en una de las partes, se reduzcan á un par, las fuerzas elásticas que esta parte ejerce sobre la otra se reducirán tambien á un par equivalente al primero. El centro de presión estará en el infinito en este caso particular.

TEORIA DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN Y ESFUERZOS CORTANTES.

5. Piezas prismáticas, esfuerzo cortante, compresión de la fibra media,- Momento y par de flexión.

Consideremos un arco $G_0 G_1$ (Fig. 14) de una curva plana cualquiera. Supongamos en el plano $A_0 B_0$, normal al arco en G_0, una superficie limitada por un contorno cerrado. Esta superficie debe llenar tres condiciones:

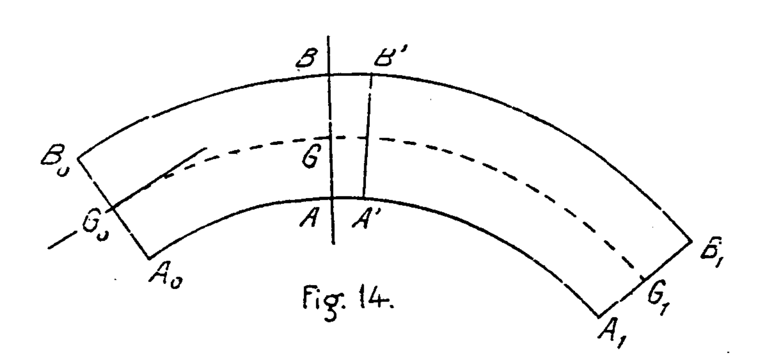


Fig. 14.

1ª Ha de ser simétrica con relación á la normal $A_0 B_0$ á la curva $G_0 G_1$.

2ª Ha de tener su centro de gravedad G_0 sobre esta curva.

3ª Ha de tener sus dimensiones muy pequeñas en relación á la longitud del arco dado y á sus diversos radios de curvatura.

Supongamos que esta superficie se mueve, sin variar de forma, de modo que:

1º Su centro de gravedad recorre el arco.

2º Uno de sus ejes principales de inercia sea siempre normal á la curva $G_0 G_1$.

3º El otro eje principal de inercia sea normal al plano que contiene á esta curva.

Si el espacio así recorrido se supone lleno de una materia homogénea y elástica, tendremos definida la generación geométrica de los cuerpos que hemos de estudiar con el nombre de piezas prismáticas, sometidos á la acción de fuerzas exteriores situadas en el plano de la curva directriz $G_0 G_1$.

Un elemento plano cualquiera de la superficie generadora forma en su movimiento un filete prismático que se llama fibra de la pieza. La línea directriz $G_0 G_1$ se llama tambien fibra media, y es por definición el lugar geométrico de los centros de gravedad de las diversas secciones transversales AB.

Si el contorno que encierra el área móvil no permanece rigurosamente invariable, sino que cambia de modo que sus dimensiones en dos posiciones infinitamente próximas, AB y $A'B'$, difieran muy poco, la pieza prismática es de sección variable.

Sea (Fig. 15) $A_0 B_0 A_1 B_1$ una pieza prismática (viga, arco, etc.), libre ó no, en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores (comprendiendo en estas fuerzas las reacciones de los apoyos si los hubiera) y situadas todas en el plano de simetría de la pieza.

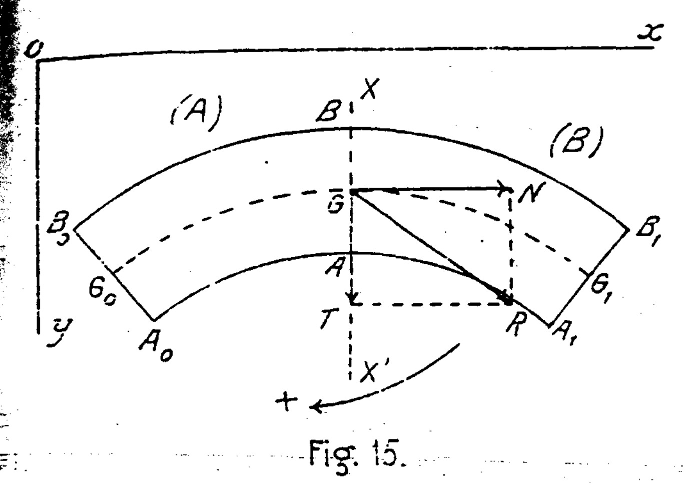


Fig. 15.

Sea AB la traza sobre el plano de la fibra media de una sección XX' normal á esta curva. Ésta sección divide la pieza en dos partes (A) y (B). Cuando hablemos de las fuerzas elásticas que tienen sus puntos de aplicación en la sección AB, entenderemos que son las ejercidas por la parte de la izquierda $A_0 B_0 A B$ del cuerpo sobre la de la derecha $A B A_1 B_1$, ó sea por la parte (A) sobre la (B).

Supongamos que se trasladan todas estas fuerzas al punto G. Sea R la resultante de esta traslación y M el momento del par resultante correspondiente. Ésta fuerza R está en el plano de simetría y tiene por componentes á T y N, según la línea AB y la normal á la sección, ó sea la tangente á la fibra media en el punto G.

La fuerza T, ó suma de las componentes, tangenciales á la sección de las fuerzas elásticas, es la que llamaremos esfuerzo cortante.

La fuerza N, ó suma de las componentes normales á la misma de las fuerzas elásticas, se denomina la compresión ó tensión de la fibra media.

El par resultante de la traslación de las fuerzas elásticas á G, se llama el par de flexión relativo á este punto.

El momento M de este par, es decir, la suma de los momentos de las fuerzas elásticas con relación al punto G, se llama momento de flexión ó momento flector.

Las componentes tangencial y normal de una fuerza elástica se denominan muchas veces para abreviar fuerza elástica tangencial ó normal.

4. Convenios sobre los signos.- Importa precisar bien los signos de las magnitudes que acabamos de definir.

El arco G_0G se cuenta positivamente de izquierda á derecha. Consideramos las fuerzas elásticas normales como positivas cuando representan compresiones; por esto llamaremos N la compresión de la fibra media.

Cuando relacionamos la posición de la fibra media á ejes de coordenadas, que son rectangulares, tomamos como sentido positivo de la linea AB, ó de la normal á la fibra media, un sentido tal que la normal paralela al eje de las y (es decir, la normal en el punto de máxima ó mínima ordenada) tenga por sentido positivo el sentido positivo de las y.

El esfuerzo cortante T será positivo ó negativo según que esté ó no dirigido en el sentido positivo de la normal.

Los momentos, particularmente el de flexión M, se contarán, (en general y si no se advierte lo contrario), positivamente si tienden á hacer girar su brazo de palanca en el sentido del semi-eje positivo de las x hacia el semi-positivo de las y, como indica la flecha.

Cuando no hagamos uso de coordenadas, el esfuerzo cortante será positivo en un sentido tal que en la sección normal á la pieza sea descendente. En este caso tambien los momentos, en particular el de flexión M, se contarán positivamente de izquierda á derecha.

5. Teoremas generales.- Esto supuesto, consideremos las fuerzas exteriores que obran entre la sección AB y la extremidad izquierda de la pieza, comprendiendo entre las mismas, si hay lugar á ello, las reacciones de los apoyos. Transportémoslas al punto G y sean R' su resultante de translación; T', N' las componentes de estas fuerzas según la línea AB y la normal á esta línea; M' el momento del par resultante de esta translación. Sabemos (1) que las fuerzas exteriores, comprendiendo en ellas las reacciones de los apoyos, que obran entre la extremidad izquierda de la pieza y una sección cualquiera AB, tienen la misma resultante ó el mismo par resultante, que las fuerzas

elásticas que obran en esta sección.

Estos dos sistemas de fuerzas, admitan ó no una resultante, son equivalentes, y tienen por tanto, la misma resultante de traslación y el mismo momento resultante; es decir, que

$$T' = T, \qquad N' = N, \qquad M' = M,$$

Teorema I.- 1º El esfuerzo cortante correspondiente á una sección cualquiera XX' de una pieza prismática sometida á fuerzas cualesquiera situadas en el plano de simetría, puede definirse indiferentemente como la suma T de las fuerzas elásticas tangenciales ejercida en la sección XX', ó la suma T' de las proyecciones sobre esta sección de las fuerzas exteriores, comprendidas las reacciones de los apoyos, que obran á su izquierda.

2º La compresión normal puede definirse como la suma N de las fuerzas elásticas normales á la sección XX', ó bien la suma de las proyecciones sobre la normal á esta sección de todas las fuerzas exteriores que obran á su izquierda.

Corolario 1º En las vigas ó piezas prismáticas de fibra media rectilínea, colocadas horizontalmente, sometidas á cargas verticales y que reposan sobre apoyos que solo dan reacciones verticales, la compresión normal es nula en toda ella: N=0.

Para tales piezas solo se debe considerar en cada sección el valor del momento de flexión y el del esfuerzo cortante.

Corolario 2º. *Si en una pieza prismática se consideran dos secciones AB y A'B', infinitamente próximas (Fig. 16) entre las cuales existe una fuerza F de magnitud finita, normal á la fibra media los* momentos de flexión correspondientes á estas dos secciones solo difieren entre si en una cantidad infinitamente pequeña *asi como tambien* la compresión de la fibra media; *pero los esfuerzos cortantes* se diferencian en toda la magnitud de la fuerza F. *Si la fuerza F es tangente á la fibra media* el esfuerzo cortante y el momento de flexión en las dos secciones difieren infinitamente poco, *mientras que* la compresión de la fibra media es la que se modifica aumentando su valor en toda la magnitud de la fuerza F.

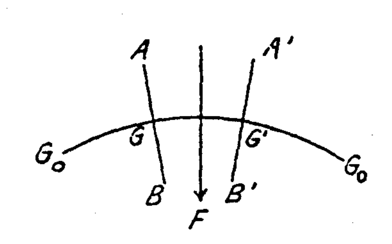


Fig. 16.

En efecto: Sean AB y A'B' dos secciones infinitamente próximas que comprenden entre si la fuerza F (Fig. 16) de magnitud finita, normal á la fibra media.

El momento de flexión en el punto G es la suma de los momentos, con relación á este punto, de todas las fuerzas que obran entre él y la extremidad de la izquierda G_0 de la pieza.

El momento de flexión en el punto G' se compone:

1º de la suma de los momentos de estas mismas fuerzas relativamente al punto G', suma que no difiere más que infinitamente poco de la precedente; 2º del momento, relativamente al punto G', de la fuerza F, momento que es infinitamente pequeño.

Se ve del mismo modo que la fuerza F, aunque de magnitud finita, no modifica más que infinitamente poco la compresión de la fibra media en G', puesto que su proyección sobre la tangente á esta curva en G' es infinitamente pequeña. Pero sobre A'B' se proyecta en su verdadera magnitud, de suerte que el esfuerzo cortante en G', en donde interviene F difiere del esfuerzo cortante en G, donde F no interviene en toda la magnitud de esta fuerza.

Igualmente se demostrará la proposición relativa al caso en que la fuerza F es tangente á la fibra media.

Corolario 3º - *En una viga horizontal, sometida á cargas verticales y colocada sobre apoyos que solo producen reacciones verticales* los momentos de flexión correspondientes á dos secciones infinitamente próximas *que comprendan entre si ya una fuerza finita directamente aplicada, ya un apoyo simple,* solo difieren infinitamente poco, *mientras que* los esfuerzos cortantes difieren en toda la magnitud de la fuerza directamente aplicada ó de la reacción del apoyo.

Se puede, pues, hablar del momento de flexión sobre un

apoyo como siendo el límite del que existe en una sección infinitamente próxima, considerada ya á su derecha, ya á su izquierda, mientras que el esfuerzo cortante debe ser considerado en una ú otra de estas dos secciones, según el objeto que se persiga.

Teorema II. *Cualesquiera que sean las cargas que sufre una pieza prismática, pero estando estas cargas en el plano de la directriz (que es el plano de simetría de la pieza) y cualquiera que sea el número y la naturaleza de los apoyos, el momento de flexión M en un punto cualquiera G de la pieza puede obtenerse* sumando al momento de flexión M', relativo á un punto fijo G', arbitrariamente elegido á la izquierda de G, *la suma de los momentos relativamente á G: 1º* de todas las fuerzas exteriores que obran entre G y G'; 2º del esfuerzo cortante y de la compresión de la fibra media en G'.

En efecto: el momento de flexión en el punto G (figura 17) se compone: 1º de la suma de los momentos relativamente á este punto de todas las fuerzas, comprendidas las reacciones de los apoyos que obran entre

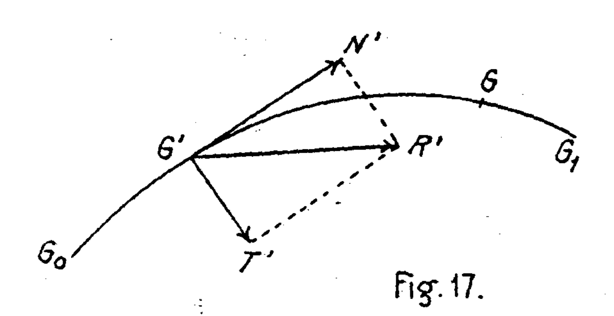


Fig. 17.

G y G'; 2º de la suma de los momentos relativamente á G, de todas las fuerzas que obran entre el punto G' y la

extremidad izquierda, G_0, de la pieza. Pero no se cambia la suma de los momentos de estas últimas fuerzas reemplazándolas por su resultante de traslación en G' y por el par resultante correspondiente. Esta resultante R' tiene por componentes, según la normal y la tangente á la fibra media, las fuerzas N' y T'; el par resultante tiene por momento M'; luego la suma de momentos de las fuerzas del segundo grupo se compone de la suma de los momentos de T' y N', respectivamente á G, más el momento M'.

Teorema III. *El esfuerzo cortante en una sección AB de una pieza prismática, cuya fibra media sea recta ó curva, es igual, en valor absoluto á* la derivada del momento de flexión en este punto, tomada relativamente al arco $s = G_0G_1$ de la fibra media *contada positivamente desde la extremidad izquierda G_0 (Fig. 18).* Sean

Fig. 18.

$GG' = ds$

AB = sección recta de la pieza

CD = tangente á la curva G_0G_1 en el punto G.

R = resultante de las fuerzas exteriores comprendidas

entre el extremo G_0 y el punto G.

Según el convenio admitido sobre los signos de M, T y N, será negativo el momento de la resultante R respecto á los puntos G y G', y positivo el valor del esfuerzo cortante $T = R \cos.\alpha$. El momento de flexión M en un punto G ó G' vale (Teorema I)

$$-Rd \qquad ó \qquad -Rd'$$

El incremento dM que recibirá M cuando pasemos del punto G al G', que dista ds del primero será

$$dM = -Rd' + Rd = -R(d'-d) = -R.G'g = -R ds \cos\alpha = -T ds;$$

luego

$$\frac{dM}{ds} = -T \qquad ó \qquad T = -\frac{dM}{ds}$$

Esta relación demuestra el enunciado del teorema. Como consecuencia del citado convenio sobre los signos se debe tomar esta derivada con signo contrario. Si conocemos una función, $F(s)$, que nos dé M para cada punto G de la fibra media, hallaremos la derivada $\frac{dM}{ds}$ de esta función, cambiaremos el signo del resultado, y obtendremos el valor relativo del esfuerzo cortante.

Corolario 1º En los puntos donde M es máximo ó mínimo el esfuerzo cortante T es nulo; y recíprocamente.

Corolario 2º Cuando M es constante en todos los puntos de una pieza, el esfuerzo cortante T es nulo para todos esos puntos y viceversa.

Teorema IV.-1º *El momento de flexión en un punto de un tramo de una viga apoyada en n puntos, bajo la influencia de cargas cualesquiera, es,* además de una función lineal de la abcisa de este punto, el mismo que si este tramo estuviese separado del resto de la viga y colocado por sus extremos sobre apoyos simples.

2º *El esfuerzo cortante en un punto del tramo es* una constante y el mismo que si el tramo estuviese tambien separado del resto de la viga.

Sea XX una viga apoyada sobre n puntos y a b una viga apoyada por sus extremos y de igual longitud que el tramo AB, (Fig. 19), de la primera. Sea M el momento de

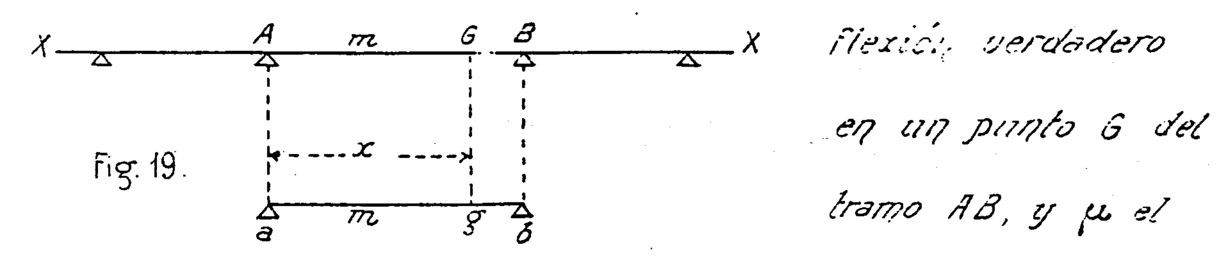


Fig. 19.

flexión verdadero en un punto G del tramo AB, y μ el momento de flexión que la carga del tramo produciría en el punto g actuando sobre la viga a b. Sea, por último m la suma de los momentos relativos al punto G ó g de las cargas que actúan entre estos puntos y la extremidad izquierda del tramo AB ó de la viga a b. Llamando M' al momento de flexión correspondiente á un punto G', infinitamente proximo al apoyo A, y T' al esfuerzo cortante en el mismo punto, tendremos, según el teorema segundo, que

$$M = M' + m + T'x$$

para el tramo AB; y por igual razón, para la viga ab se tiene

$$\mu = Ax + m.$$

Eliminando m entre las dos ecuaciones, resulta:

$$M = M' + (T' - A)x + \mu \quad \text{ó} \quad M = \mu + Ax + B$$

llamando A al cociente constante de x y B á la constante M'. Estas constantes A y B lo son para un tramo, pero su valor cambia generalmente de un tramo á otro.

Se deduce de esta ecuación que

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\mu}{dx} + A,$$

y atendiendo al teorema tercero tendremos

$$T = t + A.$$

Los valores deducidos para M y T demuestran el teorema.

6.- Designaremos por las letras M, T y N, respectivamente, el momento de flexión, el esfuerzo cortante y la compresión de la fibra media.

Sea (Fig. 20) $G_0 G_1$ la fibra media de una pieza cualquiera sometida á fuerzas situadas en el plano de esta línea, que es el plano de simetría de la pieza.

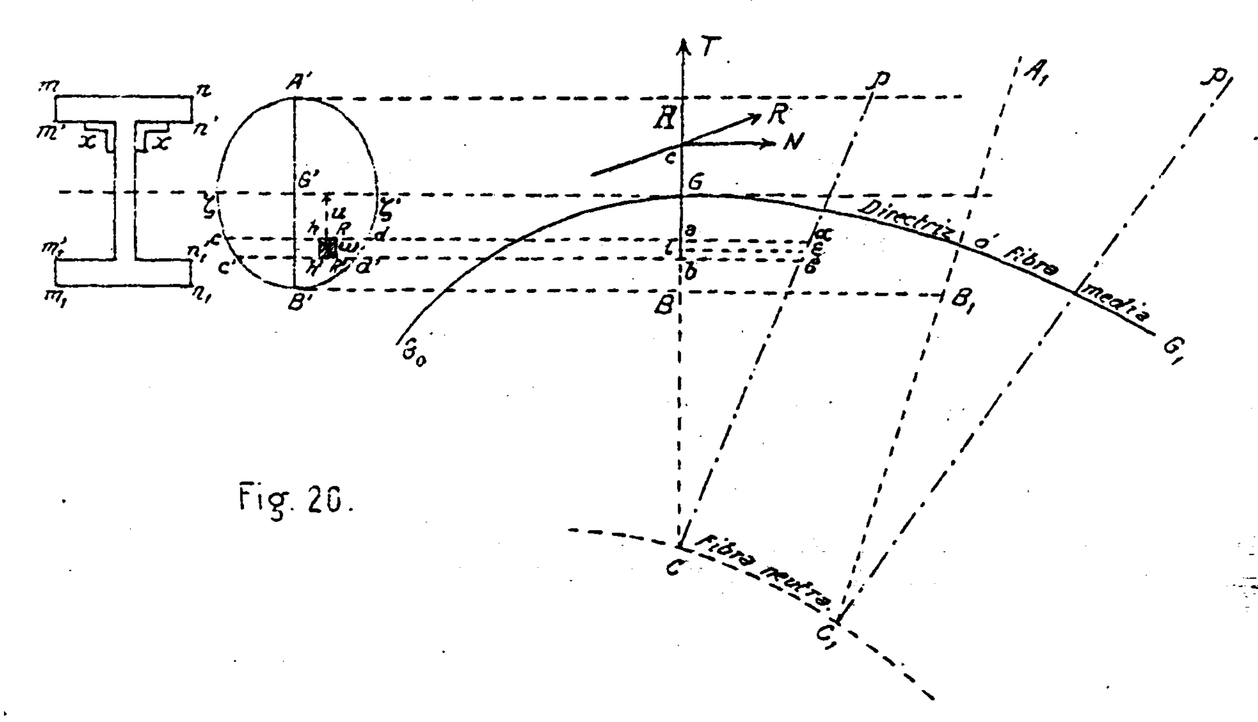


Fig. 20.

Hagamos una sección transversal en un punto G; sea AB su traza sobre el plano de simetría. En A'B' representamos la forma de la sección AB rebatida, sobre el plano de la figura; la línea A'B' = AB es eje de simetría, y contiene, por consiguiente, el centro de gravedad G' de la sección, el cual está proyectado en el punto G.

Llamemos S á la superficie de esta sección. Si por cada elemento ω contenido en la sección AB trazamos una ordenada normal á su plano é igual á la tensión ó presión normal η que soporta dicho elemento referido á la unidad de superficie, el lugar de las extremidades de estas líneas será una cierta superficie S' que solamente la teoría de la elasticidad puede dar á conocer.

Pero si las dimensiones de la sección, es decir, las

dimensiones transversales de la pieza son pequeñas con relación á su longitud, se podrá, y esto ès lo que se hace en Resistencia de materiales, sustituir esta porción de superficie S' por su plano tangente P, lo cual equivale á suponer que las fuerzas elásticas η varían proporcionalmente á las ordenadas de un plano.

Éste plano será normal al de la fibra media. Sea pc su traza sobre el plano de esta fibra; ab un elemento de la linea AB, ó la proyección sobre el plano de la figura de una faja $c\,d\,c'd' = dS$ de la seccion S. Todos los puntos de esta faja soportan una misma tensión ó presión normal η, representada por la ordenada $i\varepsilon$. La presión total que soporta el área dS, es pues, igual á

$$i\varepsilon . dS.$$

Sea u la distancia del punto i al centro de gravedad G de la superficie, distancia contada positivamente en el sentido de la normal positiva, es decir, de A hacia B (4) en este caso.

La tensión normal $\eta = i\varepsilon$, reducida á la unidad de superficie, siendo la ordenada de una recta correspondiente á la abcisa u, es una función lineal de u, de suerte que se puede escribir

$$\eta = i\varepsilon = Au + B$$

siendo A y B dos constantes desconocidas, las que son

faciles de determinar en función del momento de flexión M relativo al punto G y de la compresión N de la fibra media en este punto.

Basta para esto recordar que M es la suma de los momentos relativamente al punto G de las fuerzas exteriores que obran á la izquierda de la sección AB, ó tambien (5) la suma de los momentos relativamente á este punto de las fuerzas elásticas que obran en la sección; y que, del mismo modo, N es la suma de las proyecciones sobre la normal á AB de las fuerzas de que hablamos, ó también la suma de las proyecciones sobre esta línea de las fuerzas elásticas. La resultante de las acciones normales η sobre la faja superficial dS es

$$\eta . dS = (Au + B)\, dS;$$

por lo tanto, la compresión N de la fibra media, ó resultante de las fuerzas $\eta . dS$ es

$$N = \int \eta . dS = \int (Au + B)\, dS,$$

extendiéndose la integral á todos los elementos dS de la sección AB, ó

$$N = A\int u . dS + B\int dS.$$

Pero $\int dS$ representa el área S de la sección; por otra parte, $\int u . dS = 0$, puesto que el punto G es el centro de gravedad de la sección; por consiguiente

$$N = BS, \quad B = \frac{N}{S}$$

Esta relación $\frac{N}{S}$ se llama la compresión media de la sección S.

Del mismo modo, siendo el sentido positivo de los momentos de izquierda á derecha y contándose las fuerzas N y η positivamente cuando son compresiones, de suerte que la fuerza $\eta . dS$ se cuenta positivamente de i hacia e, tendremos que

$$M = -\int \eta . dS . u = -\int (Au + B)\, u . dS.$$

$$M = -A\int u^2 dS - B\int u . dS.$$

ó bien por ser $\int u . dS = o$

$$M = -A\int u^2 dS$$

Tracemos por G una linea $\zeta\zeta'$ perpendicular á A'B', es decir, una perpendicular en el espacio al plano de la fibra media y que pase por el centro de gravedad G. Esta linea será un eje principal de inercia de la sección A'B'.

La integral que entra en el segundo miembro representa la suma de los productos de las areas h'K h K' de todos los elementos ω infinitamente pequeños que componen la sección por los cuadrados de sus distancias u al eje $\zeta\zeta'$. Esta suma, que es independiente de las fuerzas que actúan y depende únicamente de la forma geométrica de la sección, se llama momento de inercia de esta sección con relación al eje $\zeta\zeta'$ cuya traza sobre el plano de simetria es el centro de gravedad G de la sección. Esta cantidad es muy importante en los

problemas de Resistencia. Se designa por la letra I, de suerte que
$$M = -A.I \quad \text{ó} \quad A = -\frac{M}{I}$$

Por consiguiente, la presión ó tensión normal η en cada punto de la sección AB se conocerá por la fórmula
$$\eta = -\frac{M}{I}.u + \frac{N}{S}$$
en función: 1º del momento de flexión M y de la compresión de la fibra media N, que son cantidades variables con las fuerzas exteriores; 2º del area S y del momento de inercia I de la sección, relativamente al eje, proyectado en G, que no dependen más que de la forma de la sección.

7. Discusión de la ecuación general de resistencia.- La hipótesis del plano, establecida para conocer R en cada punto de la sección AB, nos ha conducido á la fórmula
$$\eta \; \cancel{R} = -\frac{Mu}{I} + \frac{N}{S}$$

Reemplazando en esta fórmula á $\underline{u}$ por la máxima distancia $\underline{v}$ de un punto de la sección al centro de gravedad $\underline{G}$, y á $\overset{\eta}{\underline{u}}$ por su mayor valor que llamaremos $\underline{R}$ (inicial de resistencia) correspondiente á dicha distancia $\underline{v}$; obtendremos la ecuación llamada de resistencia,
$$R = \frac{N}{S} - \frac{Mv}{I}$$

1º Llamemos u' á la distancia entre los puntos G y C. Para este último debe ser $\underline{\eta}$ igual á cero, luego $u' = \frac{NI}{MS}$.
El lugar geométrico de los puntos C correspondientes á las diversas secciones AB será una curva que se llama

la fibra neutra de la pieza. Esta línea puede estar dentro ó fuera de la pieza según el valor que tenga u.' Las intersecciones de los planos AC y pC serán rectas que se proyectarán en el punto C, y formarán una superficie cilíndrica que constituirá una capa de fibras neutras. A cada una de estas rectas se la llama eje neutro.

En las vigas horizontales cargadas verticalmente, resulta $N=0$ para todos los puntos de la directriz luego $u'=0$. La fibra neutra será esta misma directriz, y la capa de fibras neutras será un plano horizontal que pase por esta recta. Para este caso especial, tan frecuente en la práctica, el eje neutro pasa por el centro de gravedad de la sección de la pieza, y es á la vez el eje $\zeta\zeta'$ principal de inercia de esta sección.

2º En el caso particular antes citado, ó sea cuando la compresión N de la fibra media es nula, tenemos que

$$R = -\frac{Mv}{I} \qquad (A)$$

Se dice, en este caso, que la pieza está sometida á una flexión simple, es decir, á una flexión no acompañada de compresiones ó extensiones. Las fuerzas elásticas normales varían entonces proporcionalmente á su distancia á la fibra media; ó en otros términos: la fibra neutra y la fibra media coinciden.

3º Si, por el contrario, el momento M de flexión es

nulo en todas las secciones, se tiene

$$R = \frac{N}{S}.$$

y se dice en este caso que la pieza está sometida á una extensión simple ó á una compresión simple, según que N sea negativo ó positivo. Las fuerzas elásticas son entonces constantes en toda la extensión de una sección: luego $u' = \infty$.

4º El caso general es aquel en que ninguna de las cantidades M y N es nula. Entonces, aunque sea $N \gtrless 0$, el término $\frac{Mv}{I}$ suele tener un valor grande comparado con el que corresponde al término $\frac{N}{S}$. En efecto, el momento flector M puede expresarse en función de la compresión normal N (Fig. 20) puesto que dicho momento es el momento de la resultante R respecto al punto 6 ó el de su componente N con relación á este punto. Luego llamando d á la distancia $6c$ tendremos que

$$M = N \times d$$

La ecuación de resistencia se modificará y será

$$R = \frac{N}{S} - \frac{N}{S} \times \frac{d.v}{r^2}$$

Pero el factor numérico $\frac{d \times v}{r^2}$ es por regla general bastante mayor que la unidad, luego su producto por $\frac{N}{S}$, será tambien mayor que el término $\frac{N}{S}$.

Por lo tanto $\frac{Mv}{I}$ será una cantidad mayor que $\frac{N}{S}$ y en esto se funda la costumbre de despreciar muchas veces este término $\frac{N}{S}$ á título de aproximación y entonces la

fórmula (A) es aplicable á todos los casos.

5º Esto no es exacto si la distancia $\underline{d}$, que expresa el momento flector, tuviese un pequeño valor, ó sea cuando el centro de presión $\underline{c}$ está próximo al centro de gravedad G. En este caso se encuentran las bóvedas.

Resumiendo:

1º Si N=o se tiene rigurosamente la fórmula

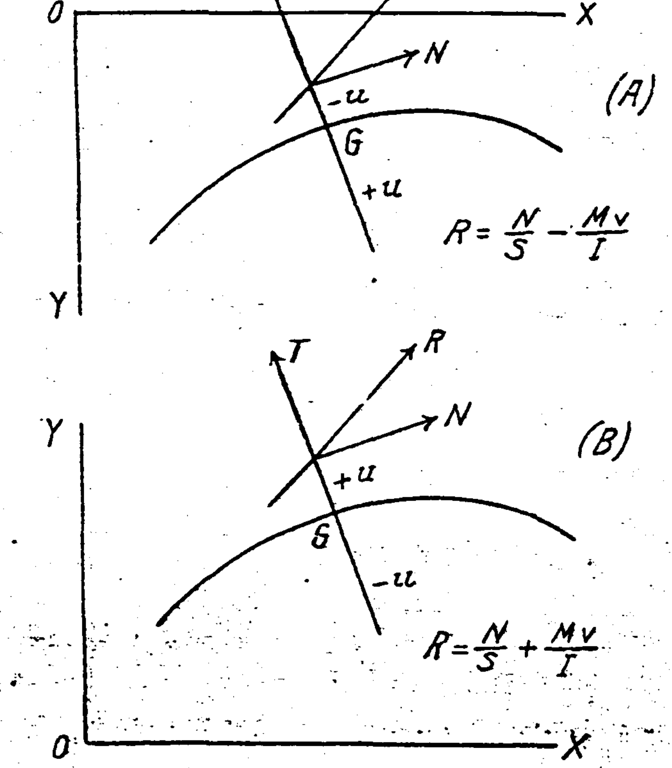
$$R=-\frac{Mv}{I}.$$

Si $N \lessgtr o$, se puede emplear esta misma fórmula en lugar de la general $R=-\frac{M}{I}v+\frac{N}{S}$ á titulo de aproximación.

2º Si M=o se emplea la formula $R=\frac{N}{S}$.

3º Si $M \gtrless o$ y $N \gtrless o$, siendo N muy grande, es necesario emplear siempre la fórmula completa

$$R=\frac{N}{S}-\frac{Mv}{I}$$



Nota.- La hipótesis que hemos establecido respecto á los signos, corresponde á la figura (A) en la cual se marca cual es el sentido positivo ó negativo de la abcisa $\underline{u}$. Por tanto la ecuación de resistencia llevará aquí el signo negativo en su segundo término.

Cuando este sentido convenido para las abcisas cambie, como indica la figura (B), entonces ha de cambiarse en aquella ecuación el signo de y y obtendremos el segundo término positivo. La primera forma de la ecuación la emplearemos en las vigas rectas y arcos colgados y la segunda para los arcos apoyados.

Forma de la sección de una pieza.- Se deduce de esto que para fuerzas dadas, es decir, para valores conocidos de M y N, correspondientes á una sección S determinada, la presión ó tensión normal que soporta esta sección en un punto es tanto más debil y, por consecuencia, la pieza trabaja tanto menos, cuanto mayor sea su momento de inercia I. Así, la materia estará tanto mejor distribuida en la sección de la pieza cuanto mayor sea el valor de I.

Para obtener el mayor momento de inercia posible es necesario alejar la materia del eje $\zeta\zeta'$ ó del centro de gravedad de la pieza; por esta razón se emplean secciones como la indicada á la izquierda de la figura 20, llamadas en forma de doble T. Las partes $m\,n\,m'n'$ y $m_1\,n_1\,m_1'\,n_1'$ se denominan las tablas, superior é inferior, de la doble T; la parte vertical es el alma; las piezas x son escuadras destinadas á unir entre sí el alma con cada una de las tablas.

Esfuerzo cortante.- Se admite en general, en Resistencia de materiales, que las fuerzas elásticas tangenciales pueden ser

consideradas como uniformemente repartidas en toda la extensión de una sección. Admitida esta hipótesis (en lo que no hay gran inconveniente puesto que el esfuerzo cortante T es, en general de poca influencia comparada á la del momento de flexión) la fuerza elástica tangencial, reducida á la unidad de superficie en cada punto de una sección S, valdrá $\frac{T}{S}$.

---

8. Deformaciones elásticas.

Supongamos (Fig. 14) que la pieza prismática $A_0 B_0 A_1 B_1$ está solicitada por fuerzas que se equilibran. Algunas de estas pueden ser dadas, otras pueden representar reacciones de apoyos, pero admitimos que unas y otras estan situadas en el plano de la fibra media ó plano de simetría de la pieza.

Bajo la acción de estas fuerzas el cuerpo tomará otra forma, tal como la $a_0 b_0 a_1 b_1$ (fig. 21). Generalmente esta nueva forma es poco diferente de la $A_0 B_0 A_1 B_1$ que tenia en su estado natural. Sin embargo, algunas veces puede un cuerpo, sin romperse, cambiar notablemente de forma: este es el caso de un junco ó de una regla plana, recta en su estado natural, y que puede recibir, sin rotura, una curvatura tanto más pronunciada cuanto que sus dimensiones transversales sean menores con relación á su longitud. Lo mis-

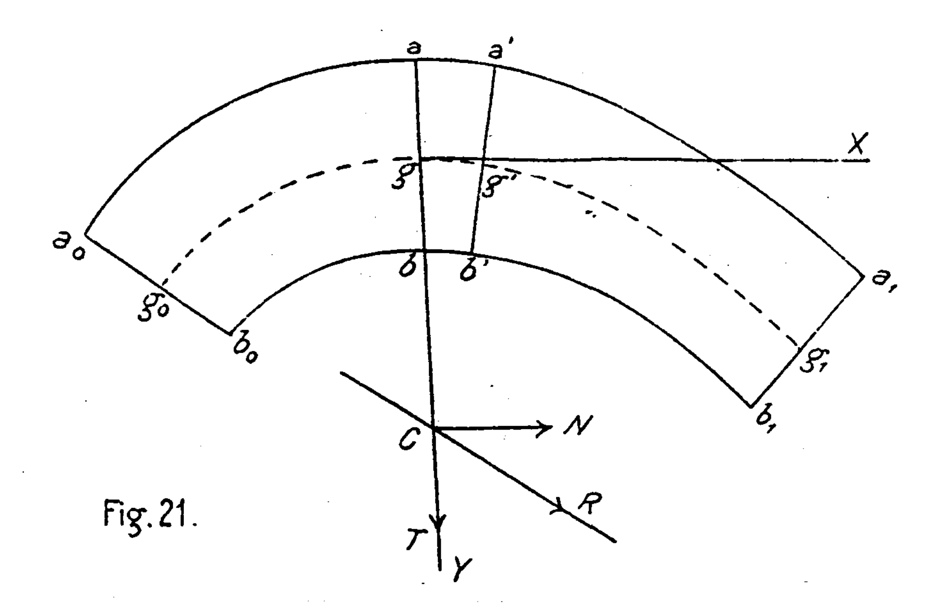


Fig. 21.

mo tiene lugar en los resortes.

No se producen, generalmente, grandes deformaciones en las piezas que se emplean en el arte de la construcción y de las que hemos de tratar. Sin embargo, para comprender todos los casos, supondremos que la posición definitiva de equilibrio $a_o b_o a_1 b_1$ puede diferir tanto como se quiera de la posición primitiva $A_o B_o A_1 B_1$.

Como todo es simétrico con relación al plano de la fibra media, esta no habrá salido de su plano, de modo que la nueva fibra $g_o g_1$ es igualmente plana y situada en el plano de la $G_o G_1$.

Hemos visto que si el cuerpo $a_o b_o a_1 b_1$ está en equilibrio y trazamos una sección transversal $\underline{a}\ \underline{b}$ (es decir, normal á la fibra media $g_o g_1$) la porción $a_o b_o a b$ deberá también estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que la solicitan. Estas fuerzas son: 1º las exteriores, (com-

prendidas las reacciones de los apoyos, si existen), que obran desde la extremidad $a_0 b_0$ de la izquierda á la sección $\underline{a}\,\underline{b}$; 2º las fuerzas elásticas ejercidas por la parte del cuerpo situada á la derecha de $\underline{a}\,\underline{b}$ sobre la de la izquierda.

Vimos además que gX, gY, son la tangente y la normal a la fibra media en g, prolongadas en el sentido positivo convenido, ó sea, gX hacia la parte del cuerpo colocada á la derecha de $\underline{a}\,\underline{b}$; y $\underline{g}\,\underline{Y}$ en sentido descendente, si se refiere el cuerpo á dos ejes rectangulares, de los cuales el de las Y positivas sea vertical descendente.

Hemos designado tambien por N, T, M la compresión de la fibra media, el esfuerzo cortante y el momento de flexión, es decir, la suma de las proyecciones sobre gX y gY, y la suma de los momentos relativamente al punto g de todas las fuerzas exteriores (incluyendo las reacciones de los apoyos, si los hubiera), que obran entre $a_0 b_0$ y $a\,b$.

Sabemos (nº5) que, en el estado de equilibrio, estas tres cantidades representan, respectivamente, las sumas de las proyecciones sobre gX y gY, y la suma de los momentos, relativamente á g, de las fuerzas elásticas ejercidas por la parte de la izquierda $a_0 b_0$

sobre la de la derecha del cuerpo.

Por último, hemos visto que estas fuerzas elásticas ó interiores se distribuyen sobre una sección plana normal á la directriz G_0G_1 de la pieza, de manera que sus componentes normales á dicha sección se rigen por la hipótesis llamada del plano, y que el valor de estas componentes se determina en cada punto por la ecuación general de resistencia

$$R = \frac{N}{S} - \frac{Mv}{I}.$$

Se conocerá este sistema interior siempre que N y M lo sean para cualquier sección AB, y por tanto siempre que todo el sistema exterior de donde proceden N y M, sea tambien conocido. Pero como este sistema externo debe equilibrarse sobre la pieza prismática, es evidente que las ecuaciones de la Estática son las únicas que nos podrán servir para determinar los valores de algunas de las fuerzas exteriores que fuesen desconocidas á priori. Cuando el sistema de ecuaciones que hubiesen de expresar este equilibrio, no fuese suficiente para determinar aquellas fuerzas exteriores desconocidas, se necesitará hacer intervenir la deformación de la pieza prismática, á fin de salvar esta indeterminación.

Para llegar á conocer dicha deformación, sin mucha dificultad, cualquiera que sea la forma de la sección, admitiremos las tres hipótesis siguientes:

1ª Durante la deformación elástica de una pieza prismática, toda sección primitivamente plana y normal á la fibra media, después de la deformación, plana y normal á dicha fibra deformada.

Consideremos la sección plana AB (Fig. 14) hecha en el punto G del cuerpo en su estado natural, ó sea cuando ninguna fuerza ni su propio peso obran sobre él. Después de la deformación, la superficie plana AB se transformaría evidentemente, (si se consideran las cosas con rigor) en una superficie ligeramente curva. Pero á causa de las pequeñas dimensiones transversales de la pieza, se admite que esta superficie se confunde con su plano tangente, y que este plano ha permanecido sensiblemente normal á la fibra media.

2ª Las variaciones que durante la deformación se han producido en las dimensiones transversales de la pieza son despreciables en presencia de las que han tenido lugar en sus dimensiones longitudinales.

3ª Se sabe que si una varilla de longitud l, y de coeficiente de elasticidad E, se alarga ó se acorta una cantidad λ, la tensión ó presión unitaria R que produce la deformación λ está dada por la fórmula

$$R = E \times \frac{\lambda}{l}.$$

lo que se puede enunciar así: la tensión ó presión por unidad

de superficie R de una varilla es igual al producto de su alargamiento por unidad de longitud $\left(\frac{\lambda}{l}\right)$ por su coeficiente de elasticidad E.

Se admite que esta ley es aplicable á cada elemento de fibra comprendido entre dos secciones AB - A'B' muy próximas (Fig. 14).

Las dos hipótesis 1ª y 2ª reunidas equivalen á considerar toda sección transversal AB como una superficie rigurosamente invariable ó rígida, puesto que se la ha supuesto de modo que no puede curvarse ni dilatarse ó contraerse. Equivalen, en otros términos, á considerar los cuerpos que estudiamos como semi-rígidos ó semi-elásticos, á saber: rígidos en todas direcciones transversales, y elásticos solamente en la dirección longitudinal.

10. Relaciones entre las fuerzas elásticas y las deformaciones que producen.

Sea $A_0 B_0 A_1 B_1$ la pieza en su estado natural (Fig. 14) y supongamos que $a_0 b_0 a_1 b_1$ (Fig. 21) es la nueva forma que toma aquella por la acción de fuerzas exteriores.

Consideremos un arco $G_0 G_1$ (Fig. 14) de una curva plana cualquiera, directriz de la pieza en su estado natural, y descompongamos esta en una série de dovelas ó cuñas por medio de planos normales á dicha directriz,

dirigidos por puntos de esta curva que distan entre sí un elemento de arco d_s. Cada una de aquellas dovelas elementales, tal como la $ABA'B'$, cambiará de forma según lo convenido en las hipótesis 1.ª y 2.ª y por tanto, la cara $A'B'$ se acercará ó separará de la AB, formando con ella un nuevo ángulo diedro. Si el número de ellas fuese n, tendríamos otra serie n de dovelas diferentes de las primeras, las cuales compondrían la nueva pieza deformada $a_0 b_0 a_1 b_1$, y es evidente que para pasar de la pieza primitiva á la segunda, á fin de llegar ó conocer la forma que esta tomaría, bastará determinar la deformacion que sufre cada una de las n cuñas ó dovelas primeras.

Consideremos, al efecto, las dos dovelas $ABA'B'$ y $aba'b'$, de las figuras 14 y 21. Admitamos que esta segunda es la nueva forma que ha recibido la primera. Llevemos $aba'b'$ sobre $ABA'B'$ de manera que la cara $\underline{a}$ $\underline{b}$ coincida con la AB; las otras dos caras tomarán las posiciones indicadas en la fig. 22, $A'_1 B'_1 - a'_1 b'_1$. Las longitudes de las diversas fibras comprendidas entre los planos AB y $A'B'$ pueden suponerse iguales entre sí, y por tanto á GG'_1 ó d_s.

Supuestas colocadas ambas dovelas de este modo vemos:

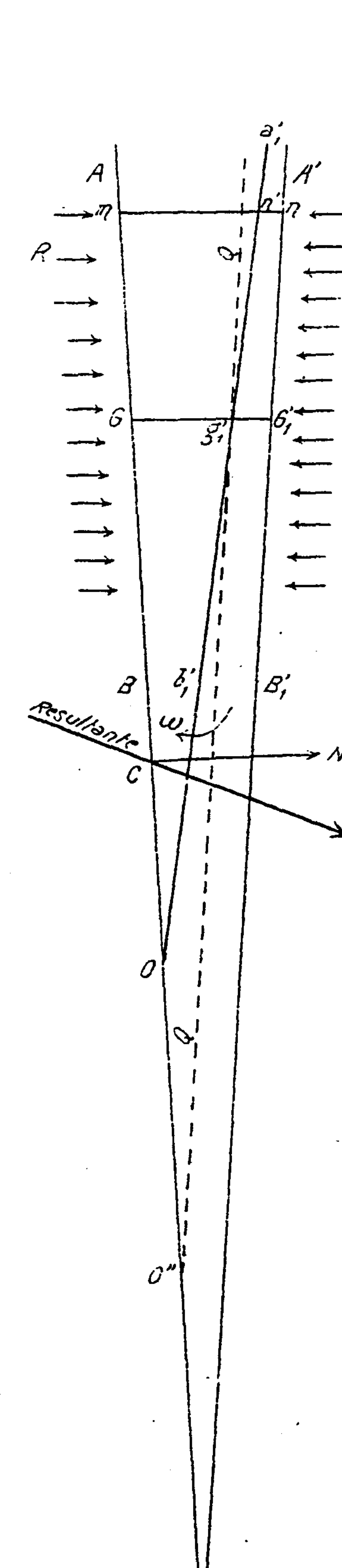


Fig. 22.

1º Que la deformación λ que recibe una fibra cualquiera, tal como $m\,n$ es la longitud $n\,n'$ comprendida entre los planos $A'_1 B'_1$ y $a'_1 b'_1$.

2º Que los valores de R, deducidos de la ecuación de resistencia para los extremos m y n de dicha fibra, son iguales, de sentido contrario, y producen el alargamiento ó acortamiento λ correspondiente á la fibra. En este caso es acortamiento, puesto que se trata de una compresión.

3º Que según la 3ª hipotesis podremos escribir para cada fibra

$$R = E\,\frac{\lambda}{ds}$$

Y 4º Que conseguiremos pasar de la primera forma á la segunda llevando el plano $A'_1 B'_1$ paralelamente á sí mismo hasta que el punto G'_1 coincida con el g'_1, y girando despues la nueva posición QQ alrededor del eje g'_1 para hacerle coincidir con el plano $a'_1 b'_1$, es decir, mediante una traslación $G'_1 g'_1 = \lambda_0$ y una rotación ω.

Ahora bien, si llamamos σ á la superficie de la sec-

ción recta de una fibra, el producto $R\sigma$ expresará en Kilógramos la componente normal á AB de la fuerza elástica que actúe sobre dicha fibra:

$$\text{luego}\begin{cases} N = \Sigma R\sigma = \Sigma E\frac{\lambda}{ds}\sigma = E.\frac{1}{ds}\Sigma\lambda\sigma \\ M = \Sigma R\sigma.u = -\Sigma E\frac{\lambda}{ds}\sigma.u = -E\frac{1}{ds}\Sigma\lambda\sigma.u \end{cases}$$

Pero según lo indicado en el último párrafo, se puede expresar el acortamiento λ de una fibra en función de λ_0 que recibe la fibra media y del ángulo ω que gira el plano QQ; pues tenemos evidentemente

$$\text{que}\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \omega u \text{ para el caso de acortamiento.} \\ -\lambda = -\lambda_0 + \omega u \text{ para el caso de alargamiento.} \end{cases}$$

El primero es el de la figura 22; el segundo tendrá lugar cuando las fuerzas repartidas R fuesen negativas y produjesen tensiones ó alargamientos, colocando el plano $a_1'b_1'$ á la derecha del $A_1'B_1'$. La abcisa $\underline{u}$ será positiva hácia abajo y negativa al contrario. El ángulo ω de la rotación se llama ángulo de flexión; se mide por su tangente y será positivo ó negativo según el convenio establecido.

Reemplazando λ por su valor en las últimas ecuaciones y llamando S la superficie de la sección normal de la pieza tendremos que

$$N = E\frac{1}{ds}(\lambda_0 S + \omega\Sigma\sigma u) = E\frac{1}{ds}\lambda_0 S.$$

$$M = -E\frac{1}{ds}(\Sigma\lambda_0\sigma u + \omega\Sigma\sigma u^2) = -E\frac{1}{ds}\omega I;$$

luego

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_o = \frac{N ds}{ES} \\ \omega = -\frac{M ds}{EI}\end{array}\right\}$$ Relaciones entre las fuerzas elásticas y las deformaciones que producen.

11. Variación de curvatura de una pieza prismática por efecto de su deformación elástica. - *Prolongando las líneas A', B' y a', b', (Fig. 22) hasta que encuentren á la AB en O' y O respectivamente, vemos que estos puntos son los centros de curvatura de la pieza prismática y de la deformada.*

Llamemos

ρ_o al radio de curvatura de la primera

ρ al id de id de la segunda

ds al arco GG',

ds' al arco Gg',

El ángulo en O valdrá..... $\frac{ds}{\rho}$

El id en O' id ..... $\frac{ds}{\rho_o}$

Prolonguemos la línea OO y se formará el triángulo og', o', en el cual tenemos que

$$\frac{ds'}{\rho} = \frac{ds}{\rho_o} + \omega \qquad ó \qquad \frac{ds'}{\rho} - \frac{ds}{\rho_o} = \omega = -\frac{M ds}{EI};$$

pero

$$ds' = ds - \lambda_o; \qquad luego \quad \frac{ds - \lambda_o}{\rho} - \frac{ds}{\rho_o} = -\frac{M ds}{EI}.$$

Sustituyendo λ_o por su valor y dividiendo por ds resulta

$$\frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{N}{ES}\right) - \frac{1}{\rho_o} = -\frac{M}{EI}.$$

Si no hay compresión, ó bien si N=0, se reduce la fórmula á

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o} = -\frac{M}{EI} \qquad (A)$$

Debe notarse que este resultado es exacto aproximadamente aunque $\frac{N}{S}$ no sea cero, porque siendo el coeficiente de elasticidad muy grande (para el hierro vale $E = 2 \times 10^{10}$) el término $\frac{N}{ES}$ es despreciable ante la unidad.

Para que la fórmula (A) sea general se deberá contar el radio de curvatura ρ positiva ó negativamente según caiga ó no en el sentido positivo elegido para la normal, con arreglo al convenio establecido en el n.º 4.

Cuando la fibra media primitiva es circular, ρ_0 es constante; cuando es recta, es decir, si la pieza es una viga, $\rho_0 = \infty$, y para este caso la fórmula (A) será

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$$

la cual sirve generalmente de fundamento á la teoría de las vigas.

Supongamos una viga horizontal cuya fibra media se tome por eje de las x, siendo el de las y positivas vertical descendente. (Fig. 23)

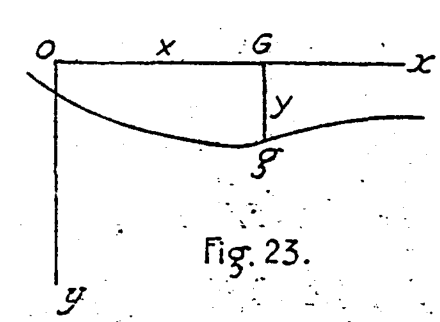


Fig. 23.

Llamando x, y, las coordenadas de un punto g de la fibra media despues de la deformación tendremos,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}};$$

$\frac{1}{\rho}$ debe contarse positivamente en el sentido de las $\underline{y}$ positivas, es decir, cuando el centro de curvatura se halle hácia abajo; pero entonces $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo; por tanto se debe tomar

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad ó \qquad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = -\frac{M}{EI}$$

En el caso en que la deformación es muy pequeña, la ordenada $\underline{y}$ de la fibra media deformada y su derivada $\frac{dy}{dx}$, ó sea la inclinación de una cualquiera de sus tangentes, son muy pequeñas y se puede despreciar el cuadrado de $\frac{dy}{dx}$ ante la unidad. Se tiene en este caso la fórmula ó ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

que sirve de fundamento á la teoría de las vigas ó piezas rectas en el caso de deformaciones muy pequeñas.

Nota I.- La curva que recibe la fibra media despues de la flexión se llama curva de flexión.

La fórmula $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$ nos dice que, tanto para flexiones finitas como para flexiones pequeñas:

1º, los puntos de inflexión de la curva de flexión tienen lugar en los puntos en que el momento de

flexión se anula y solamente en estos puntos; 2.°, en los puntos en que el momento de flexión es positivo, la curva vuelve su concavidad hacia arriba, y en los puntos en que es negativo la concavidad mira hacia abajo.

Sin embargo, la conclusión 2ª puede invertirse, si así se prefiere, cambiando el sentido del eje de las y, mientras que la 1ª es absoluta y fundamental.

Esto puede extenderse á las piezas curvas. La fórmula (A) enseña: 1.° que la curvatura de la fibra media deformada es la misma que la del punto correspondiente de la fibra primitiva, en todos los puntos en que el momento flector es nulo y solamente en estos puntos; 2.° segun el convenio establecido sobre el sentido de la curvatura y del momento, la curvatura de la fibra media decrece, al pasar del estado natural al estado final, para los puntos en que el momento es positivo, y crece en los puntos en que es negativo. En efecto, de la fórmula (A), $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{Mds}{EI}$, se deduce que en las regiones de momentos positivos $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho_0}$; luego $\rho_0 < \rho$, ó la nueva curva es más abierta que la primera. Análogamente vemos que en las regiones de momentos negativos $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{\rho_0}$ y $\rho_0 > \rho$, ó la nueva curva es más cerrada que la primera.

Nota II.- Resulta de la fórmula $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$ que la rela-

ción $\frac{M}{EI}$ es la inversa de una longitud; por lo tanto, el producto de esta relación por una longitud es un número abstracto independiente de toda elección de unidades.

Influencia de la temperatura.- Esto que precede supone que la deformación de la pieza es consecuencia solo de su elasticidad, lo cual tendrá lugar si la temperatura de dicha pieza permanece constante antes y despues de su colocación en obra. Tomemos esta temperatura por cero de la escala termométrica.

Supongamos ahora que en la sección AB que se considera la temperatura llega á ser igual á $\tau°$ siendo τ un número positivo ó negativo según que la temperatura es de $\tau°$ más elevada ó de $\tau°$ menos elevada que la de colocación.

Sea δ el coeficiente de dilatación lineal correspondiente á la materia que forma la pieza, es decir, la cantidad que la unidad de longitud de esta materia se alarga por un grado centígrado que aumente la temperatura.

Los números τ y δ serán generalmente los mismos en toda la extensión de la pieza

La longitud $\underline{ds}$ supuesta sensiblemente constante para todos los elementos de fibra compren-

didos entre AB y $A'B'$ (Fig. 22) se convertirá en $ds + \delta\tau . ds$. El alargamiento $\delta\tau . ds$ será positivo ó negativo según que τ sea positivo ó negativo.

El acortamiento total del elemento ds de la fibra media será

$$\lambda_0' = \lambda_0 - \delta\tau . ds \qquad (a)$$

Cuando τ sea negativo ó descienda la temperatura habrá que añadir al acortamiento λ_0 el segundo $\delta\tau . ds$ producido por tal descenso.

11.- Determinación de los desplazamientos, tanto elásticos como caloríficos, cuando se suponen muy pequeños.

Consideremos una pieza (Fig. 24) cuya fibra media, en su estado natural, ocupa la posición $G_0 G''$ y que

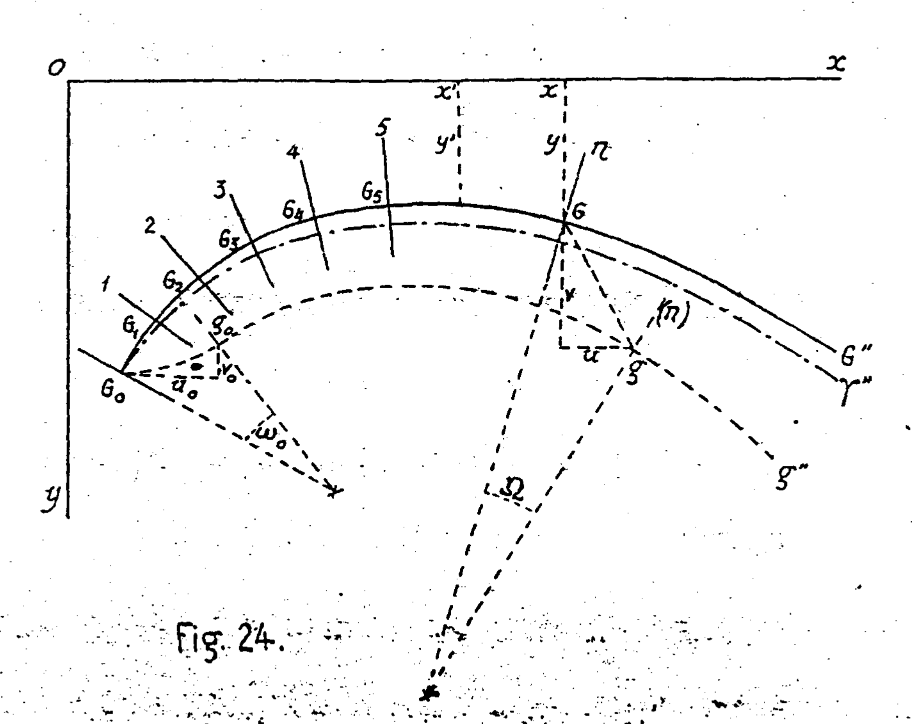


Fig. 24.

bajo la influencia de fuerzas dadas, toma una posición final de equilibrio $g_o\, g''$.

Un punto cualquiera G de la fibra media primitiva, habrá venido á $\underline{g}$, y la sección normal $\underline{\eta}$, hecha en G habrá venido á ocupar la posición (η). Se trata de determinar: 1º en magnitud, direccion y sentido el desplazamiento Gg del punto G; 2º la magnitud y el sentido del ángulo Ω que ha girado la seccion η para venir á (η).

Refiramos el sistema á dos ejes de coordenadas rectangulares cualesquiera, ox, oy; designemos por $\underline{x}$ é $\underline{y}$ las coordenadas del punto G; por $G_o\, G'' = s$ el arco de la fibra media contando de izquierda á derecha por $\underline{u}$ y $\underline{v}$ las proyecciones sobre los dos ejes del desplazamiento Gg; de suerte que las coordenadas del punto g serán: $x' = x + u$, $y' = y + v$.

Las tres incógnitas del problema son pues, u, v y Ω; se las puede considerar como tres funciones de la variable s. Las supondremos, además, bastante pequeñas para que se puedan despreciar las cantidades del orden de sus cuadrados, lo que equivale á decir que se las puede tratar como cantidades infinitamente pequeñas.

Esto expuesto, concibamos que se desplaza la curva final $g_o\, g''$ en su plano sin cambiar su forma,

de manera que venga el punto g_0 á G_0 y quede, además, tangente en G_0 á la curva $G_0 G''$.

Esta nueva posición $G\gamma''$ estará así enteramente determinada. Para llevar la fibra media $G_0 G''$ á su posición final $g_0 g''$ se la puede hacer coincidir primero con $G_0 \gamma''$, procurando que las secciones normales queden normales á la nueva curva, con lo cual se le habrá dado á la pieza una forma idéntica á su forma final $g_0 g''$, y conducirla despues á su posicion final, procurando desplazarla como un sistema invariable de manera que se lleve su fibra media de $G_0 \gamma''$ á $g_0 g''$. Para esto bastará imprimirla una traslación igual y paralela al desplazamiento $G_0 g_0$ y una rotación igual al ángulo de las tangentes en G_0 y g_0, ó al ángulo que se ha hecho girar á la sección normal $G_0 g_0$; designaremos por ω_0 este ángulo, por u_0 y v_0 las componentes paralelas á los ejes del desplazamiento $G_0 g_0$, y miraremos como datos á las tres constantes $u_0\ v_0\ \omega_0$, las cuales solo sirven para definir la posición definitiva $g_0 g''$ de la pieza sin influir en su forma. Así, pues, luego de haber llevado la pieza de $G_0 G''$ á $G_0 \gamma''$, no quedará más que imprimirle una rotación ω_0 alrededor del punto G_0, despues una traslación u_0 paralela al eje de las x, y por último, una traslación v_0 paralela al eje de las y.

Para ver como se puede deformar la pieza de manera que se traslade á $G_0 \gamma''$, marquemos sobre la fibra media primitiva puntos infinitamente próximos y separados entre si la cantidad ds: $G_0, G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G$, y tracemos las secciones normales correspondientes $G_0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n$.

Designemos por $1'', 2'', 3'' \ldots\ldots n''$ lo que han venido á ser estas secciones $G_0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ despues de la deformación. Estas nuevas secciones normales á $G_0 \gamma''$ no estan señaladas en la figura.

Quedando la sección G_0, por hipótesis, fija, podemos llevar la 1 que le está infinitamente próxima á su nueva posición mediante un acortamiento positivo ó negativo del elemento $G_0 G_1$ de la fibra media y una rotación conveniente alrededor de G_1. Supongamos que en estos movimientos toda la parte $G_1 G''$ haya sido arrastrada sin cambiar de forma; hallándose de este modo en su lugar la sección 1, podemos conducir análogamente la sección 2 á su nuevo lugar 2'' mediante un alargamiento ó acortamiento del elemento $G_1 G_2$ y una rotación alrededor de G_2. Supongamos, como antes, que toda la porción $G_2 G''$ de la pieza que queda á la derecha del punto G_2 haya sido arrastrada por estos dos movimientos. Estando así la sección 2 en su lugar, podemos, del mismo modo, llevar la sección 3, imprimiendo á toda la porción $G_3 G''$ de la

pieza una traslación conveniente según $G_2 G_3$, y una rotación alrededor de G_3.

Si examinamos ahora todos los movimientos que ha recibido una sección cualquiera G para llevarla á su nuevo lugar en la curva $G_0 \gamma''$ vemos que se componen: 1º de una serie de traslaciones convenientes según todos los elementos de arco G_0G_1, G_1G_2....... hasta $G_{n-1}G$; 2º de una serie de rotaciones convenientes alrededor de los puntos G_2, G_3........G_{n-1}, G. Hay que observar, sin embargo, que las rotaciones no tienen lugar alrededor de estos puntos tales como están señalados en la figura, porque después de la rotación de toda la parte G_1G'' alrededor de G_1, todos los centros de rotación G_2, G_3...... han tomado nuevas posiciones, y alrededor de la nueva posición G_2 se hará la segunda rotación, y lo mismo las siguientes.

Pero, por hipótesis, las nuevas posiciones de los centros de rotación pueden ser consideradas como si estuviesen infinitamente próximas á las primeras, y es claro que si se hace girar un cuerpo alrededor de un eje infinitamente próximo á su eje de rotación real, las diferencias que resultan en los caminos recorridos son infinitamente pequeñas con relación á estos mismos caminos, es decir, despreciables.

Una observación análoga puede aplicarse á las traslaciones, que no se hacen, es verdad, rigurosamente según $G_1 G_2$, $G_2 G_3$ ....., sino que tienen lugar según direcciones que se consideran como infinitamente próximas á las precedentes, y el error que se comete al tomar las primeras en lugar de estas ultimas es del orden de las magnitudes que hemos convenido despreciar.

Podemos, pues, decir en tesis final, que para tener el desplazamiento verdadero de un punto cualquiera G en el tránsito de la forma $G_0 G''$ á la $G_0 T''$, así como la rotación correspondiente de la sección n, basta componer entre sí: 1º traslaciones sucesivas según las direcciones conocidas $G_0 G_1$, $G_1 G_2$ ....; 2º rotaciones sucesivas alrededor de los puntos G_1, G_2, ... G, y componer enseguida la traslación resultante con la rotación resultante. Para tener la posición final $g_0 g''$ de la pieza, será necesario añadir á los movimientos precedentes la traslación $G_0 g_n$ del punto G_0 y la rotación ω de la sección correspondiente.

La expresión de las magnitudes de los movimientos que se han de componer es conocida. Empecemos por componer primero las traslaciones y despues las rotaciones.

1º Traslaciones.- *Tomemos entre G_0 y G un punto cualquiera G'; designemos por $\underline{x}'$, $\underline{y}'$ sus coordenadas; por S' el arco $G_0 G'$; de suerte que $\underline{x}'$, $\underline{y}'$ son funciones dadas de $\underline{s}'$ puesto que se da la curva $G_0 G$. Designemos, además, por M', N', S', I los valores de M, N, S, I correspondientes á dicho punto G'.*

Nótese bien que las coordenadas $\underline{x}$, $\underline{y}$, así como las cantidades M, N, S, I, se refieren á un punto dado G, para el cual se desean conocer las componentes $\underline{u}$ y $\underline{v}$ de su desplazamiento total, mientras que los valores de x', y', M', N', S', I' se refieren á los distintos puntos G' del arco $G_0 G''$, comprendidos entre el extremo G_0 y el punto G.

La magnitud de la traslación según $d\underline{s}$; es decir, la magnitud del alargamiento de este elemento será igual al alargamiento positivo $\delta \tau ds'$ producido por un aumento de temperatura, más el alargamiento negativo ó acortamiento $\frac{N' ds'}{ES'}$ producido por la compresión N, ó sea

$$\Delta S \ldots\ldots\ldots \delta \tau ds' - \frac{N' ds'}{ES'}$$

Sus componentes, según los ejes, son:

$$\Delta x \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \tau \frac{dx'}{ds'} \cdot ds' - \frac{1}{E} \cdot \frac{N'}{S'} \cdot \frac{dx'}{ds'} \cdot ds';$$

$$\Delta y \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \tau \frac{dy'}{ds'} \cdot ds' - \frac{1}{E} \cdot \frac{N'}{S'} \cdot \frac{dy'}{ds'} \cdot ds';$$

la primera según el eje de las $\underline{x}$ y la segunda respecto al de las $\underline{y}$.

Las componentes de la traslación total del punto G, paralelamente á los ejes, son las sumas ó integrales de estas componentes elementales, extendiendose la integración desde el punto G_0 al G, ó desde $s'=0$ á $s'=s$; luego puede escribirse para las mencionadas componentes relativas al punto G

$$\delta\tau\int_{x_0}^{x} dx' - \frac{1}{E}\int_{x_0}^{x}\frac{N'}{S'}dx' \ ; \quad \delta\tau\int_{y_0}^{y} dy' - \frac{1}{E}\int_{y_0}^{y}\frac{N'}{S'}dy'$$

llamando x_0, y_0, á las coordenadas del punto G_0.

Para tener la posicion definitiva $g_0 g''$ de la pieza es necesario añadir á estas componentes las u_0, v_0 relativas al punto G_0; de manera que la traslación total que ha de sufrir el punto G tiene por componentes

$$(1)\quad \begin{cases} u_0 + \delta\tau\int_{x_0}^{x} dx' - \frac{1}{E}\int_{x_0}^{x}\frac{N'}{S'}dx' & \text{paralelamente al eje } OX \\ v_0 + \delta\tau\int_{y_0}^{y} dy' - \frac{1}{E}\int_{y_0}^{y}\frac{N'}{S'}dy' & \text{paralelamente al eje } OY. \end{cases}$$

2º Rotaciones.- El ángulo que hemos designado bajo el nombre de ángulo de flexión, vale $\omega' = -\frac{M'ds'}{EI'}$, y dá el valor del ángulo de rotación alrededor de uno cualquiera de los puntos G'.

Es necesario componer entre si todas estas rotaciones comprendidas entre G_0 y G, cuyos ejes son normales al plano de la figura, y para tener la posición definitiva de la pieza será preciso añadir á

la rotación resultante la ω_o, relativa á la sección que pasa por el punto G_o.

Vamos á hallar las componentes u, v, paralelas á los ejes, del desplazamiento definitivo del punto G. Como consecuencia de la rotación ω', todo punto G de la pieza que se halle á la derecha del G' describe un pequeño arco GG'', cuyo ángulo ω' (Fig. 25) se cuenta positivamente de $\underline{ox}$ hacia $\underline{oy}$. Este arco GG'' se confunde con una perpendicular á la recta $G'G = r$. Luego las proyecciones del desplazamiento GG'' sobre el eje de las $\underline{x}$, y sobre el eje de las $\underline{y}$ serán respectivamente.

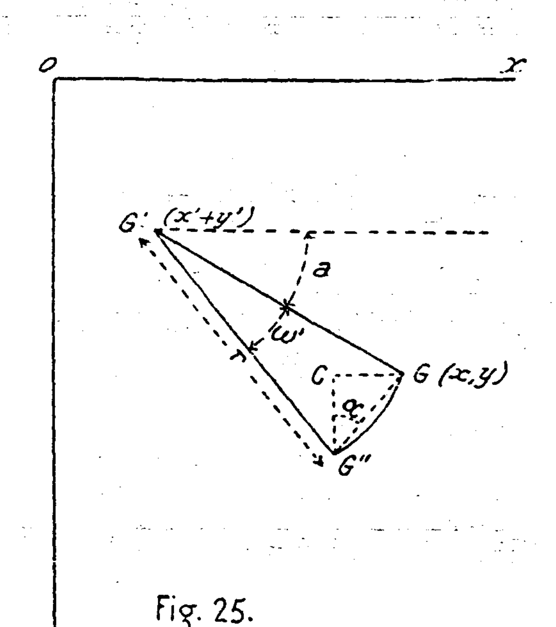


Fig. 25.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \ldots\ldots\ GG'' \operatorname{sen} \alpha = -r\omega' \operatorname{sen} \alpha = -\omega'(y-y') \\ \Delta y \ldots\ldots\ GG'' \cos \alpha = r\omega' \cos \alpha = \omega'(x-x') \end{array}\right\} (2)$$

ó $$\frac{M'(y-y')}{EI'} ds' \text{ ,, } -\frac{M'(x-x')}{EI} ds'$$

y las sumas de las proyecciones de los desplazamientos por todas las rotaciones alrededor de los distintos puntos G' comprendidos entre G_o y G (Fig. 23) son, paralelamente á los respectivos ejes.

$$\int_0^s \frac{M'(y-y')}{EI'} ds' \ldots\ldots \text{ al } ox.$$

$$-\int_0^s \frac{M'(x-x')}{EI'}\,ds' \ldots\ldots\ \text{al}\ \ oy.$$

Añadiendo á estas sumas: 1º las proyecciones del desplazamiento producido por la rotación de la seccion A_0B_0, cuyo ángulo es ω_0, y que según las expresiones (2) valen respectivamente

$$-\omega_0(y-y_0) \qquad \omega_0(x-x_0)\,;$$

2º las expresiones (1) que provienen de las traslaciones, tendremos definitivamente:

$$(3)\left\{\begin{aligned} u &= u_0-\omega_0(y-y_0)+\int_0^s \frac{M'(y-y')}{EI'}\,ds'+\delta\tau\int_{x_0}^x dx'-\int\frac{N}{ES'}\,dx' \\ v &= v_0+\omega^0(x-x_0)-\int_0^s \frac{M'(x-x')}{EI'}\,ds'+\delta\tau\int_{y_0}^y dy'-\int_{y_0}^y\frac{N}{ES'}\,dy' \end{aligned}\right.$$

El ángulo Ω que habrá girado la sección correspondiente al punto 6 se compone del ω_0 más todos los ángulos ω'; luego

$$\Omega=\omega_0-\int_0^s\frac{M'ds}{EI'} \qquad (4)$$

Estas ecuaciones (3) y (4) se han deducido suponiendo que las rotaciones positivas se cuentan del eje ox al eje oy. Si se las contase positivamente en el sentido inverso, ó sea del eje oy al ox, seria necesario cambiar en estas fórmulas

$$\omega_0 \quad M' \quad \Omega$$

por $$-\omega_0 \quad -M' \quad -\Omega$$

lo que implicaría el cambio de signo de los segundos y terceros términos de las ecuaciones (3).

En resumen: las ecuaciones que nos dan á conocer los incrementos positivos ó negativos u, v, que reciben las coordenadas x, y, de la fibra media de una pieza prismática, y el ángulo Ω que gira la sección recta AB á dicha pieza en el mismo punto G, son las siguientes, que reciben el nombre de ecuaciones de deformación:

$$D \begin{cases} u = u_0 \mp \omega_0 (y - y_0) \pm \int_0^s \frac{M(y-y')}{EI'} ds' + \delta\tau \int_{x_0}^{x} dx' - \int_{x_0}^{x} \frac{N}{ES'} dx' \\ v = v_0 \pm \omega_0 (x - x_0) \mp \int_0^s \frac{M'(x-x')}{EI'} ds' + \delta\tau \int_{y_0}^{y} dy' - \int_{y_0}^{y} \frac{N}{ES'} dy' \\ \Omega = \omega_0 - \int_0^s \frac{M'}{EI'} ds' \end{cases}$$

Tomaremos los signos superiores cuando el sistema de ejes coordenados sea ....

Los signos inferiores corresponderán al caso en que el sistema de ejes sea ....

Referiremos las vigas al primer sistema y los arcos apoyados al segundo.

Aplicaciones á las vigas.- En una viga horizontal cargada verticalmente la compresión N es nula. Las variaciones de temperatura no tienen importancia ni influencia sobre este género de piezas según se las dis-

pone en la práctica, por lo que podremos hacer $\tau = 0$ en las ecuaciones D.

Si tomamos la fibra media de la viga en su estado natural por eje de las x, y el punto extremo G_0 por origen 0, tendremos que

$$y = y_0 = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad ds' = dx'$$

De aquí resulta que el desplazamiento horizontal u de un punto cualquiera G de la fibra media será nulo, y que el desplazamiento total de cada uno de ellos es vertical. Los valores de v será las ordenadas y de la curva de flexión, la cual tendrá por ecuación

$$y = \omega_0 x - \int_0^x \frac{M(x-x')}{EI'}\,dx' = \omega_0 x - x\int_0^x \frac{M'dx'}{EI'} + \int_0^x \frac{M'x dx'}{EI'}$$

La tercera ecuación D será para este caso

$$\Omega = \omega_0 - \int_0^x \frac{M'}{EI'}\,dx'.$$

Suprimiendo los acentos bajo los signos de integración, lo cual no cambia el valor de las integrales definidas, tendremos que

$$D' \begin{cases} y = \omega_0 x - x\int_0^x \frac{M dx}{EI} + \int_0^x \frac{M x dx}{EI} \\ \Omega = \omega_0 - \int_0^x \frac{M dx}{EI} \end{cases}$$

serán las dos ecuaciones de deformación para las piezas

rectas. Derivando la primera con relacion á $\underline{x}$ resulta

$$\frac{dy}{dx} = \omega_0 - \frac{Mx}{EI} - \int_0^x \frac{Mdz}{EI} + \frac{Mx}{EI} = \omega_0 - \int_0^x \frac{Mdz}{EI} = \Omega$$

puesto que el ángulo Ω es el ángulo que gira la sección recta de la pieza en el punto G, ó tambien el ángulo que forma con el eje de las $\underline{x}$ la tangente á la curva de flexión en el punto $\underline{g}$ y vista la pequeñez de la deformación puede igualarse este ángulo Ω á su tangente $\frac{dy}{dx}$.

Derivando otra vez resulta

$$\frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{M}{EI}$$

que es la fórmula clásica hallada en el nº 10, de la que deduciriamos el desplazamiento $\underline{y}$ si la integramos dos veces.

Eliminando ω_0 entre las dos ecuaciones D' tendremos una nueva forma de la ecuacion de la curva de flexión, que será

$$D_1' \quad y = \omega_0 x - x\int_0^x \frac{Mdx}{EI} + \int_0^x \frac{Mxdx}{EI} = \Omega x + \int_0^x \frac{Mxdx}{EI}$$

Reacciones de los apoyos y disposición que se les dá.-

Se dice que una pieza prismática está simplemente apoyada en un punto G (Fig. 26) cuando se le impone á este punto la condición de permanecer sobre una linea fija $\underline{a}\ \underline{b}$, pero con libertad de moverse sobre ella.

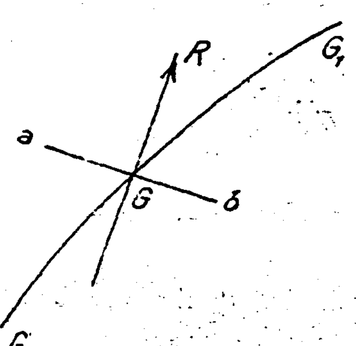


Fig. 26.

La direccion de la reacción será normal á $\underline{a}\,\underline{b}$, y su intensidad R será desconocida.

Se dice que está apoyada con empotramiento en un punto G (Fig. 27) cuando: 1º este punto ha de permanecer fijo, y 2º la normal $\underline{n}\,\underline{n}$ á la directriz en G no ha de girar, ó bien la tangente á la curva en este punto ha de ser invariable. Su reaccion se compone de una fuerza R que pasa por G para llenar la primera condición y de un PAR (p-p) que haga invariable la dirección de $\underline{n}\,\underline{n}$ oponiendose al giro de esta normal alrededor del punto G. Habrá tres incógnitas: dirección é intensidad de R y momento del par p-p.

Fig. 27.

Se dice que está apoyada con articulación en un punto G (Fig. 28) cuando solo se cumple la primera de las dos condiciones anteriores. Este sistema de apoyo dará por reacción una fuerza que pasará por G, de intensidad R y dirección desconocidas; habrá estas dos incógnitas.

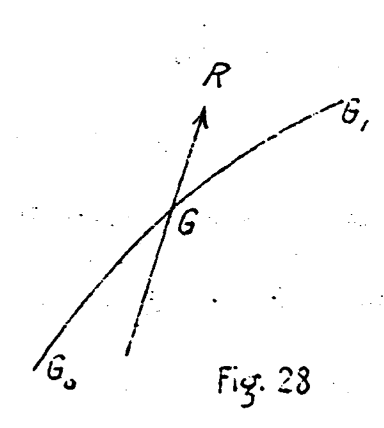


Fig. 28

Las reacciones sobre los apoyos son incógnitas que han de calcularse por las ecuaciones de equilibrio que estudiamos en la Estática, y que son:

$$\Sigma X = 0 \quad , \qquad \Sigma Y = 0 \quad , \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0$$

Cuando dichas incógnitas sean en número mayor que tres, la Estática deja indeterminado su valor, siendo entonces necesario recurrir á las ecuaciones de deformación D ó D', en las cuales entrarán las reacciones, y en las que expresaremos la invariabilidad de $\eta\,\eta$ haciendo $\Omega = 0$, ó la fijeza de un punto G escribiendo $u = 0$, $v = 0$.

Representación gráfica de los momentos de flexion y esfuerzos cortantes en las vigas.

Teorema VII.- *El momento de flexión en la sección recta de una viga horizontal colocada sobre dos apoyos simples y sometida á cargas verticales cualesquiera es igual al producto de la distancia polar de un polígono funicular cualquiera relativo á estas cargas, por la ordenada que dicha sección determina entre este polígono y su recta de cierre.*

Sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 ......(Fig. 29) las cargas que recibe la viga horizontal AB, colocada sobre apoyos simples.

Construyamos el polígono de fuerzas 1, 2, 3, 4........

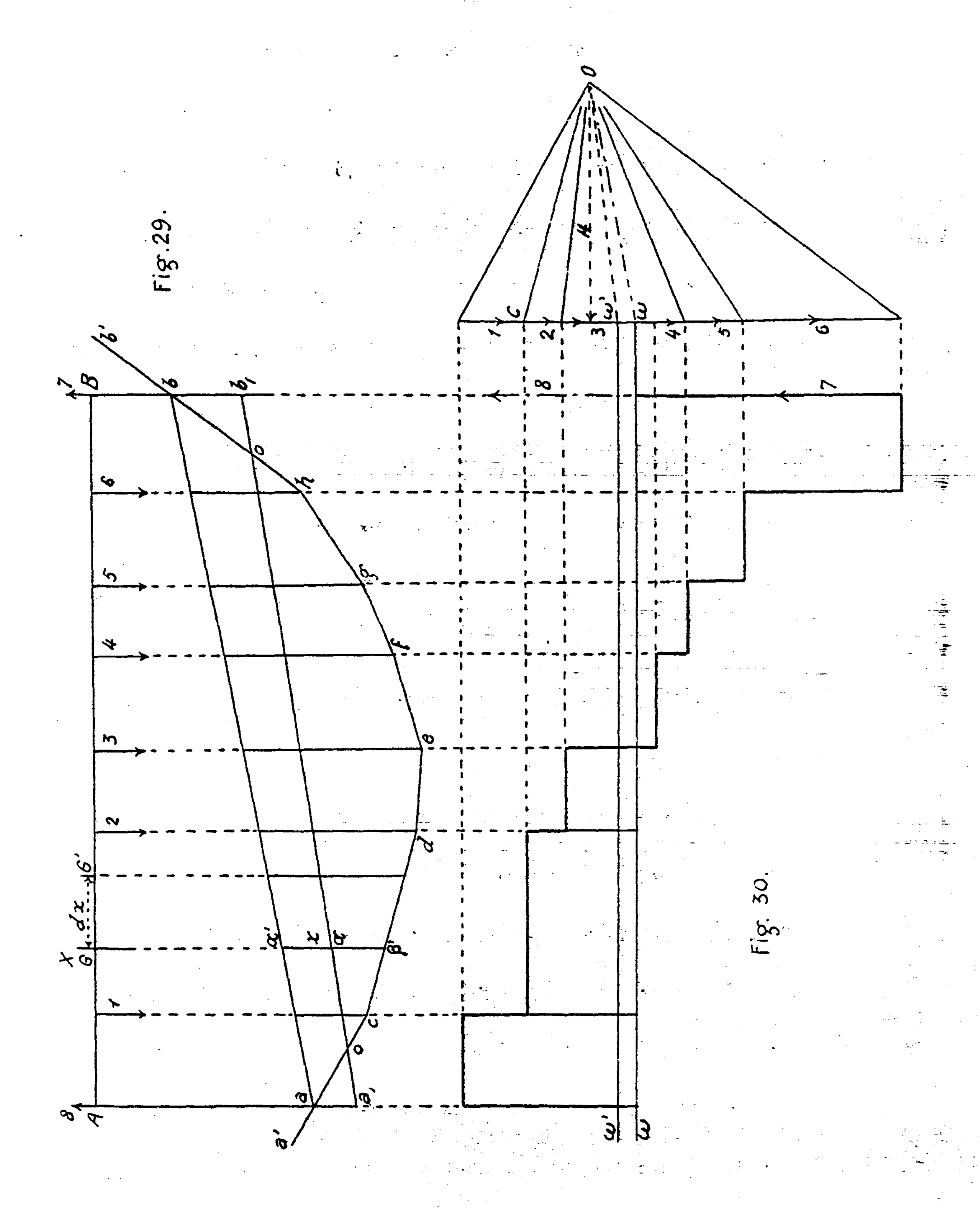


Fig. 29.

Fig. 30.

y el funicular a'c d e f g h b' relativo á un polo cualquiera O.

Si trazamos la cuerda ó línea de cierre a b y el

radio polar correspondiente $o\omega$, habremos determinado las intensidades......... 7, 8...... de las reacciones verticales 7, 8, correspondientes á los apoyos B y A de la viga.

Consideremos una sección recta cualquiera en X; esta sección determina entre el polígono funicular y la línea de cierre $\underline{a}\,\underline{b}$ una ordenada $\alpha'\beta'$ que, multiplicada por la distancia polar H dá el momento M, con relación al punto G (Fig. 29.) de la resultante de las fuerzas situadas á la izquierda de G, que son 8 y 1. Podremos escribir

$$M = \alpha'\beta' . H = z . H$$

Uno de los factores de este producto se mide á la escala de fuerzas, y el otro á la de longitudes.

Corolario 1º - *El esfuerzo cortante en G está, (según en definición) representado sobre el polígono de fuerzas por la longitud ω C, comprendida entre el radio polar 1, 2, que corresponde al lado $\underline{c}\,\underline{d}$ del polígono funicular, y el radio $o\omega$ que se refiere á la recta $\underline{a}.\underline{b}$. Si queremos representar el esfuerzo cortante por las ordenadas, contadas desde la horizontal ω-ω, obtendremos la línea escalonada de la Fig. 30.*

Nota. *Las construcciones que preceden se aplican también cuando la viga se prolonga más allá de los apoyos y lleva cargas sobre sus prolongaciones.*

Teorema VIII.- *Si se nos dá una viga apoyada sobre un número cualquiera de puntos con ó sin empotramiento, soportando cargas verticales cualesquiera, si se traza:*

1º Un polígono funicular cualquiera relativo á las cargas dadas que obran en un tramo; y

2º Una recta convenientemente elegida en el plano, tenemos que

El momento de flexión en una seccion cualquiera del tramo es igual al producto de la ordenada correspondiente á esta sección, comprendida entre la recta y el polígono, por la distancia polar de este. (Se llama tambien á dicha recta la recta de cierre del polígono).

Supongamos que la viga AB (Fig. 29) es un tramo de una viga apoyada en varios puntos.

Sea M el momento de flexión en G y μ el valor que tendria este momento si el tramo AB estuviese aislado y colocado sobre los apoyos simples A y B.

Según lo ya establecido tendremos

$$M = \mu + Ax + B$$

siendo A y B dos constantes y x la abcisa del punto G contada sobre la recta AB; pero la forme lineal Ax+B subsiste evidentemente si se cuentan las abcisas sobre otra recta, por ejemplo, la a b del polígono funicular.

Si llamamos z á la ordenada α'β contada desde

esta recta $\underline{a}\,\underline{b}$ tendremos

$$\mu = z \,.\, H$$

siendo H la distancia polar del polígono funicular.

Por consiguiente

$$M = z.H + Ax + B \qquad ó \qquad M = H\left(z + \frac{A}{H}x + \frac{B}{H}\right)$$

Construyamos la recta $y = -\frac{A}{H}x - \frac{B}{H}$, contando la ordenada y desde la recta $\underline{a}\,\underline{b}$. Sea $a_,b_,$ esta recta y tendremos

$$M = H(z - y) = H\alpha'\beta'$$

Cuando $\underline{z}$ sea mayor que $\underline{y}$ el momento M será positivo, y será negativo en el caso contrario. La superficie $o\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,o$ corresponderá á los momentos positivos, y las otras dos, $aa_,o$, $bb_,o$, se referirán á los negativos. En los puntos $o\,o$ el momento será cero. Los momentos sobre los apoyos valdrán respectivamente: $M_0 = H.aa_,$ y $M_1 = H.bb_,$.

Trazando por el polo O la recta $o\omega$; paralela á la de cierre $a_,b_,$, tendremos representado el esfuerzo cortante T para el punto G por la magnitud $\omega'C$.

Las ordenadas representativas de T para los distintos puntos de la fibra media se contarian, en este caso, desde la recta $\omega'\omega'$.

Expresión analítica del momento de flexión, esfuerzo cortante y reacciones de los apoyos para una viga horizontal colocada sobre dos apoyos simples y solici-

tada por cargas verticales.

1º Carga única. *Sea AB (fig. 31) una viga apoyada por sus extremos, sometida á la acción de una carga P, cuya abcisa al apoyo A llamaremos α.*

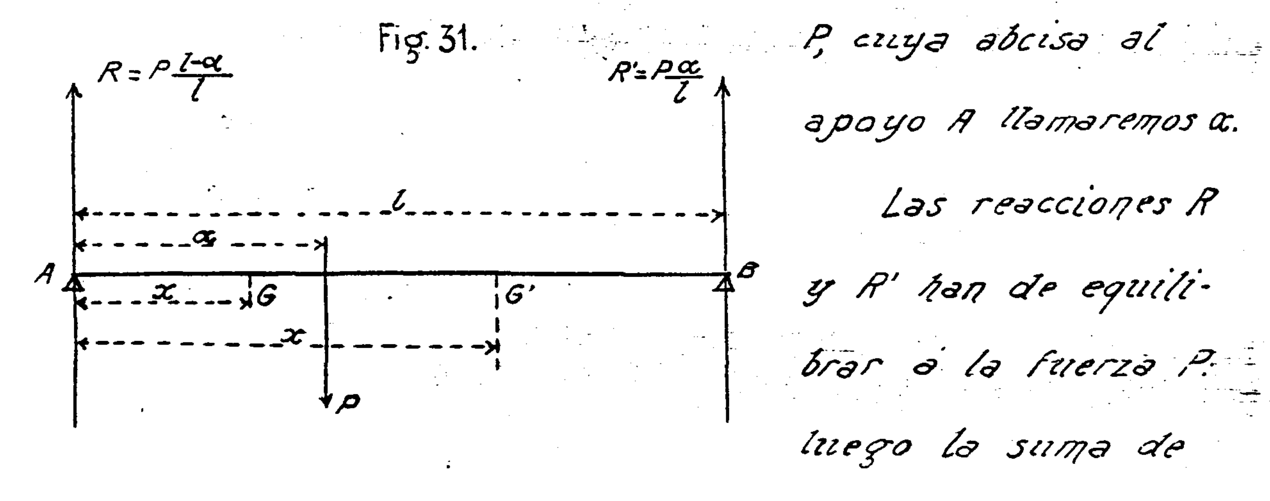


Fig. 31.

Las reacciones R y R' han de equilibrar á la fuerza P: luego la suma de los momentos de estas tres fuerzas con relación á un punto cualquiera es nula. Si tomamos los momentos sucesivamente con relacion á los apoyos B y A resulta, designando por l la longitud de la viga

$$R = \frac{P(l-\alpha)}{l} \quad , \quad R' = \frac{P\alpha}{l}$$

Busquemos el momento de flexión μ relativo á un punto G de la abcisa x, que supondremos situado, entre A y C. Por la definición del momento en G tendremos:

$$\mu = Rx = P(l-\alpha)\frac{x}{l}$$

Si el punto G está en G' entre C y B, el momento de flexión correspondiente será, por definición la suma de los momentos de las fuerzas R y P; pero como la suma de los momentos de las tres fuerzas en equilibrio R. P y R' es nula, podremos decir también

que el momento de flexión en G' es igual, cambiando de signo, al momento relativo á este punto de la fuerza R', ó sea

$$\mu = R'(l-x) = P\alpha \frac{l-x}{l}$$

Así, para $x < \alpha$ . . . . $\mu = P(l-\alpha)\frac{x}{l}$

para $x > \alpha$ . . . . $\mu = P\alpha \frac{l-x}{l}$

para $x = \alpha$ las dos fórmulas convienen de igual modo.

2º Cargas aisladas en número cualquiera.- *Supongamos (Fig. 32) un número cualquiera de fuerzas $P_1 P_2 P_3 \ldots P_i\, P_{i+1} \ldots P_n$ de abcisas $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_i\, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n$, y busquemos el momento de flexión μ relativo á un punto cualquiera G de abcisa x.*

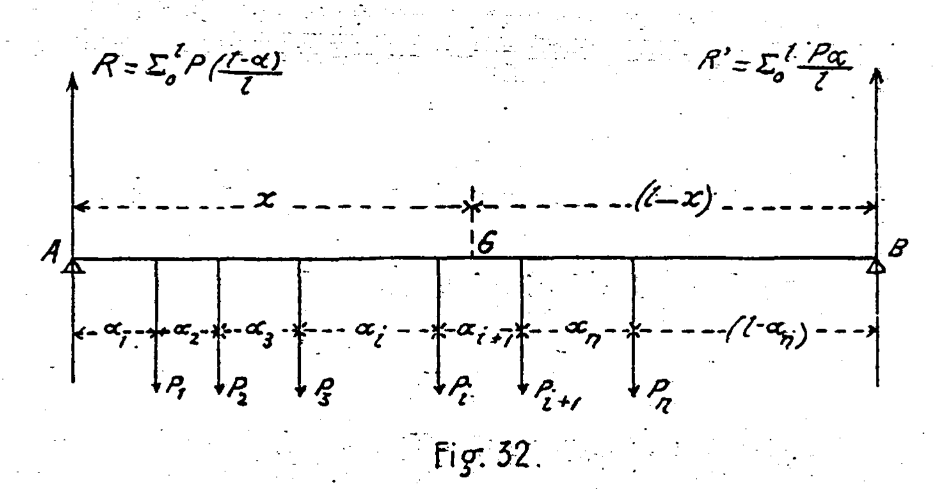


Fig. 32.

Las reacciones de los apoyos serán respectivamente

$$R = \Sigma_0^l P\frac{(l-\alpha)}{l} \qquad R' = \Sigma_0^l P\frac{\alpha}{l}$$

El momento de flexión en el punto G será

$$\mu = x\,\Sigma_0^l P\frac{(l-\alpha)}{l} - \Sigma_0^x P(x-\alpha)$$

El esfuerzo cortante valdrá para dicho punto

$$T=-\Sigma_0^l P\frac{(l-\alpha)}{l}+\Sigma_0^x P.$$

Esta expresión de T puede deducirse del valor de μ, ó atendiendo simplemente á la definición que se ha dado del esfuerzo cortante.

3º Carga uniforme sobre toda la viga.- En este caso (Fig.33) la carga ó peso p que recibe la viga por unidad de longitud es constante, luego las reacciones de los apoyos serán iguales y valdrán

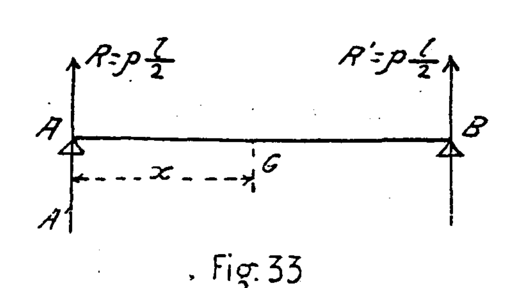


Fig. 33

$$R=R'=\frac{pl}{2}$$

El momento de flexión en el punto G será

$$\mu=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}$$

ecuación de una parábola referida á los ejes AB y AA'.

El esfuerzo cortante valdrá para dicho punto

$$T=-\frac{pl}{2}+px$$

ecuación de una recta referida á dichos ejes.

4º Supongamos una viga AB apoyada simplemente por sus extremos A y B (Fig.34). La carga p que recibe la viga por unidad de longitud es variable en cada punto de aquella, y su valor

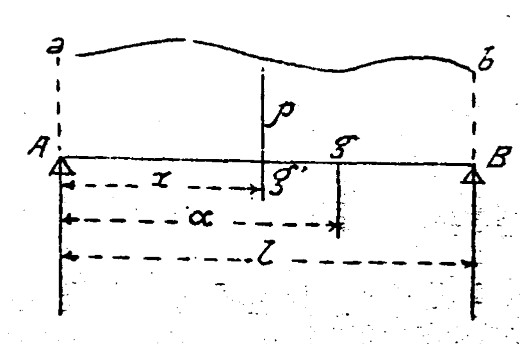


Fig.34

se define por la abcisa x de dicho punto. Podremos decir que $p=f(x)$ seria la ecuación de una curva $a\,b$ que daría á conocer la intensidad de p para cualquier punto g' de la viga. Multiplicando este valor de p por un elemento dx de la viga, fijaríamos la intensidad en Kilógramos del peso que ocupa la longitud dx.

Propongámonos calcular ahora el valor del momento μ y del esfuerzo cortante T para un punto g de la viga, determinado por su distancia α al apoyo A

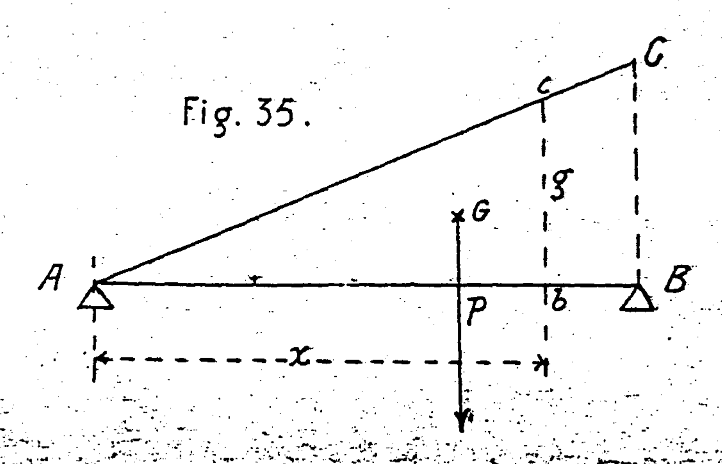
Reacción del apoyo A.... $R=\frac{1}{l}\int_0^l p.dx(l-x)$

" del apoyo B.... $R'=\frac{1}{l}\int_0^l p.dx.x$

Momento flector.......$\mu=\frac{\alpha}{l}\int_0^l p.dx(l-x)-\int_0^\alpha p.dx(\alpha-x)$

Esfuerzo cortante .... $T=\frac{d\mu}{d\alpha}=-\frac{1}{l}\int_0^l p.dx(l-x)+\int_0^\alpha p.dx.$

5° Supongamos que la curva $a\,b$ se convierte en una recta que pase por el apoyo A (Fig. 35) de la izquierda. La $f(x)=p$ tendrá ahora una forma



lineal conocida y escribiremos

$$p = a\,x$$

Este valor de p se llevaría á la expresion general del momento μ, é integrando vendríamos á conocerle para un punto cualquiera de la viga. Pero se puede deducir directamente, considerando que la carga total que pesa sobre la viga es

$$P = a.l.\frac{l}{2}$$

y las reacciones de los apoyos A y B darían respectivamente

$$R_1.l = a\,l.\frac{l}{2}.\frac{l}{3} \quad " \quad R_2.l = a\,l.\frac{l}{2}.\frac{2}{3}.l.$$

y de aquí sus valores serían

$$R_1 = \frac{a\,l^2}{6} \quad " \quad R_2 = \frac{a\,l^2}{3}.$$

Luego el valor de μ para un punto de abcisa x sería según su definición

$$\mu = \frac{a\,l^2}{6}.x - a\,x.\frac{x}{2}.\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}a.(l^2x - x^3).$$

de donde derivando con relación á x tendremos

$$T = -\frac{1}{6}a\,(l^2 - 3x^2).$$

Bastará igualar á cero el factor entre paréntesis para conocer la abcisa x que hará máximo el momento μ

$$l^2 - 3x^2 = 0 \;" \quad x = 0{,}57.l\;"$$

Por tanto

$$M_m = \frac{1}{6}a\,(0{,}57\,l^3 - \overline{0{,}57}^3.l^3) = \frac{l^3}{6}a\,(0{,}57 - \overline{0{,}57}^3).$$

ó bien

$$M_m = P \cdot \frac{l}{3} (0{,}57 - \overline{0{,}57}^3) = 0{,}128 \cdot P \cdot l.$$

Si la misma carga P estuviese uniformemente repartida, el momento máximo sería

$$\frac{Pl}{8} = 0{,}125\ Pl.$$

y se produciría en el punto medio de la viga, es decir para $x = 0{,}50 \cdot l$.

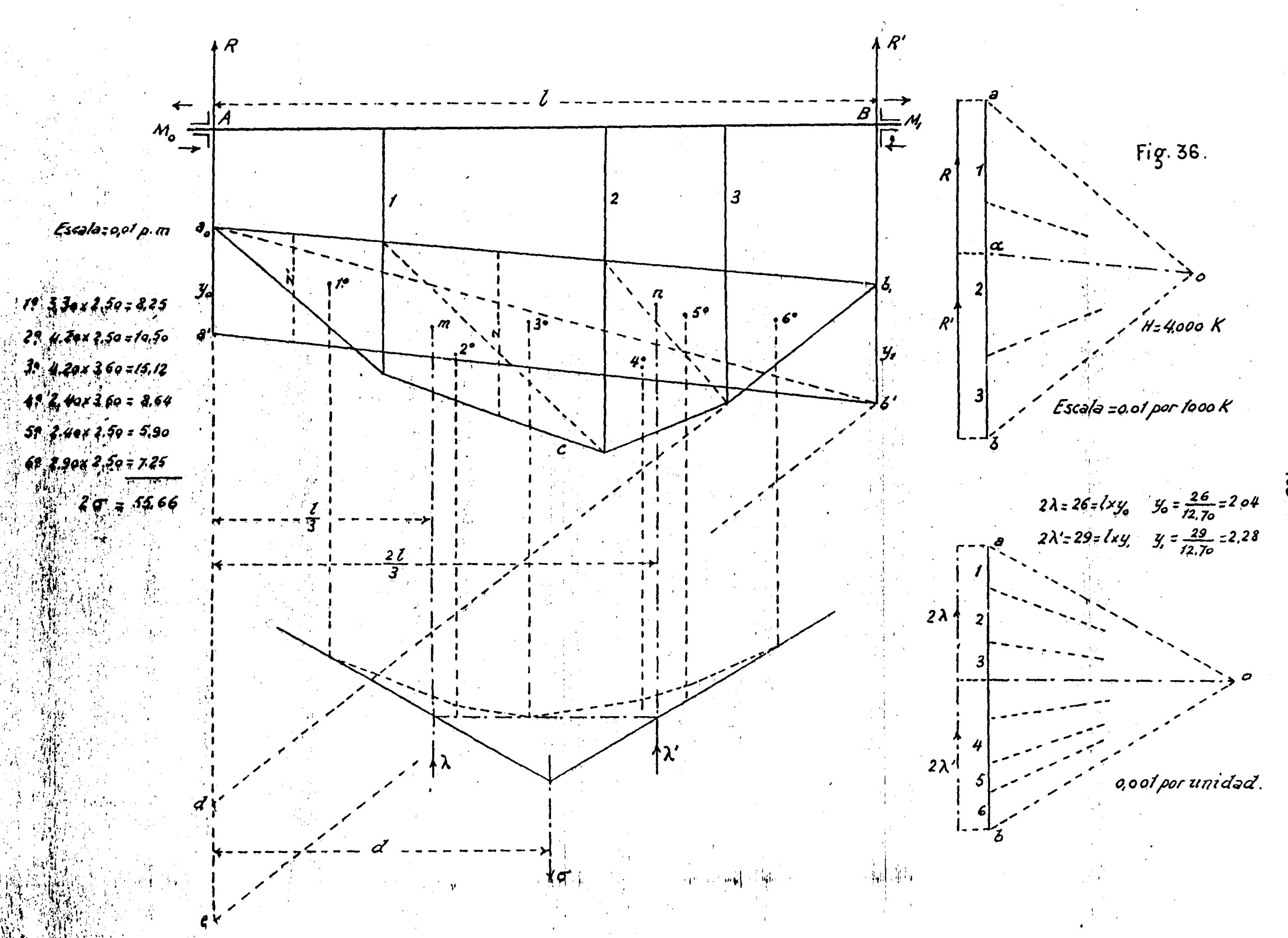
Luego los dos momentos máximos tienen casi el mismo valor en los dos casos, y el punto en que se produce este máximo para el caso de que se trata es casi el punto medio de la viga.

Puede por tanto tratarse este caso como el de carga uniformemente repartida.

Vigas horizontales empotradas.

Caso 1.º - Viga empotrada por sus extremos.

Sea AB (Fig. 36) una viga horizontal empotrada en A y en B, solicitada por las cargas verticales 1, 2, 3 y por las reacciones verticales R y R'_1 desconocidas, de



R
R'
l
A
B
M_o
M_1
1
2
3
Escala=0,01 p.m
a_o
y_o
a'
b_1
y_1
b'
c
m
n
1°
2°
3°
4°
5°
6°
1º 3,30x2,50=8,25
2º 4,20x2,50=10,50
3º 4,20x3,60=15,12
4º 2,40x3,60=8,64
5º 2,40x2,50=5,90
6º 2,90x2,50=7,25
2σ = 55,66
l/3
2l/3
λ
λ'
d
σ
e
a
b
o
α
H=4,000 K
Escala=0,01 por 1000 K
2λ=26=l×y₀   y₀=26/12,70=2,04
2λ'=29=l×y₁   y₁=29/12,70=2,28
2λ
2λ'
4
5
6
0,001 por unidad.

Fig. 36.

los apoyos. Se trata de conocer el momento de flexión M correspondiente á un punto cualquiera de la directriz, y para ello será preciso trazar la linea de cierre a'b'.

El teorema de la página 95 dice: "En una viga, solicitada por cargas verticales y colocada sobre cualquier número de apoyos simples ó empotrados, el momento de flexión correspondiente á una sección cualquiera puede representarse por la ordenada z-z' entre la recta de cierre a'b' y un polígono funicular cualquiera relativo á las cargas 1, 2, 3, que actúan en el tramo que se considera"

La recta de que se trata quedará determinada por sus dos ordenadas y_0 é y_1.

De lo dicho se deduce que

$$M = H(z-z')$$

Ahora bien, expresando en las ecuaciones de deformación que los puntos A y B son fijos y que las secciones rectas de la viga en dichos puntos no giran, tendremos las dos ecuaciones

$$0=\int_0^l Mx\,dx \qquad 0=\int_0^l M\,dx \qquad (A)$$

Reemplazando M por su valor resulta

$$0=\int_0^l zx\,dx-\int_0^l z'x\,dx \;\;,\;\; 0=\int_0^l z\,dx-\int_0^l z'\,dx \quad (1)$$

Pero $\int_0^l zx\,dx$ representa el momento estático con relación á la vertical del apoyo A de la superficie $a_0cb_1=\sigma$,

y análogamente, $\int_0^l z'x\,dx$ representa el de la superficie trapezoidal

$$a_0 b_1 b' a' = a_0 b' a' + a_0 b' b_1 = \lambda + \lambda'$$

Luego las ecuaciones (1) serán ahora

$$o = \sigma d - (\lambda \tfrac{1}{3} l + \lambda' \tfrac{2}{3} l) \quad „ \quad o = \sigma - (\lambda + \lambda') \qquad (2)$$

Considerando á $\sigma, \lambda, \lambda'$, como fuerzas verticales que pasan por los centros de gravedad de las superficies que representan, se deduce de estas dos ecuaciones que dichas fuerzas deben equilibrarse. Bastará descomponer la σ en las dos λ y λ' para conocer las intensidades de estas, ó sean los valores de las superficies $a_0 b' a'$ y $a_0 b' b_1$. Hecho esto tenemos las dos relaciones

$$\lambda = \frac{l}{2} y_0 \quad „ \quad \lambda' = \frac{l}{2} y \qquad ó \qquad 2\lambda = l y_0 \quad „ \quad 2\lambda' = l y$$

de las cuales se deducirán las ordenadas y_0 é y_1 que fijan los puntos $a' b'$ de la línea de cierre $a'b'$. El producto de estas ordenadas por la distancia polar $H = 4000$ K.^s que se ha empleado para construir el polígono funicular $a_0 c b_1$ dará el valor de los momentos de empotramiento M_0 y M_1.

Para determinar las reacciones bastará trazar por el polo o una recta $o\alpha$ paralela á la de cierre $a'b'$. En efecto, la ecuación de momentos con relación al punto A, que la Estática nos proporciona

para expresar el equilibrio de todas las fuerzas exteriores, es

$$M_0 + \Sigma P x - R'l + M_1 = 0.$$

Reemplazando estas cantidades por sus valores indicados en la figura, tendremos

$$(-a_0 a' + a_0 d + de) H = R'l = a'e \times H.$$

Trazando ahora por el polo O la recta $O\alpha$ paralela á la de cierre $a'b'$, habrá dos triángulos semejantes, $a'b'e$ y $\alpha O b$, cuyas alturas l, H serán como sus bases $a'e$ y αb; luego

$$\frac{l}{a'e} = \frac{H}{\alpha b} \quad \text{ó} \quad l.\overline{\alpha b} = \overline{a'e}.H = R'l$$

de donde

$$R' = \overline{\alpha b} \quad \text{y} \quad R = \overline{\alpha a}.$$

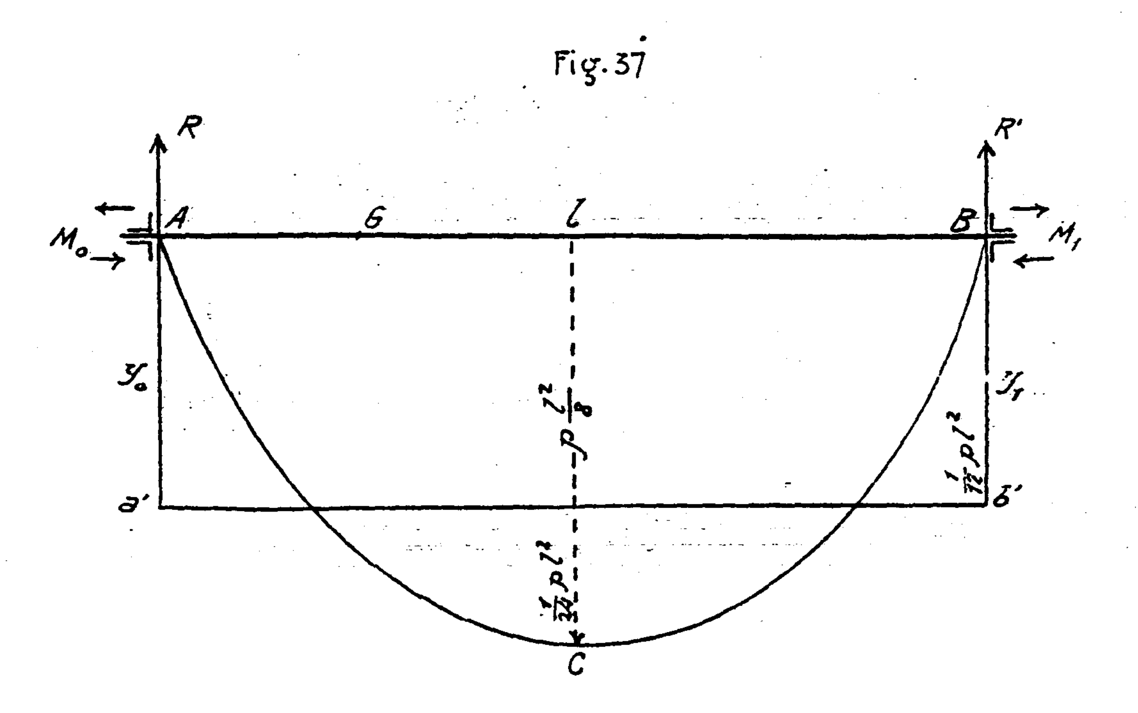
Medidas estas longitudes á la escala de fuerzas, conoceremos la intensidad de las reacciones R' y R. (El cálculo de la superficie σ y la linea de accion de esta fuerza ficticia, así como su descomposición en las dos λ y λ', se halla detallado en la figura).

(a) Caso en que la carga está uniformemente repartida á razón de p Kgs. por unidad de longitud.

El polígono funicular se convierte en este caso (fig. 37) en una parábola ACB; la superficie σ comprendida entre la recta AB y esta parábola vale $\frac{2}{3}Fl$; la linea de acción de esta fuerza ficticia

pasa por el punto medio de la viga á igual distancia

Fig. 37



Expresión analítica del momento de flexión $M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} - \frac{1}{12}pl^2$

Reacciones $R = R' = \frac{pl}{2}$: $M_o = M_1 = \frac{1}{12}pl^2$

de λ y λ', luego estas dos fuerzas serán iguales, y en su consecuencia, el trapecio anterior será ahora un rectángulo $ABb'a'$. La segunda ecuación (2) dará

$$\sigma = \lambda + \lambda' = 2\lambda$$

$$\frac{2}{3}fl = y_o l \qquad \text{luego} \qquad y_o = \frac{2}{3}f;$$

por tanto, la línea de cierre quedará determinada.

Resulta de lo dicho que

$$M_o = M_1 = y_o = \frac{2}{3}f$$

$$M_o = M_1 = \frac{2}{3}p\frac{l^2}{8} = \frac{1}{12}pl^2 \quad y \quad R = R' = \frac{1}{2}pl$$

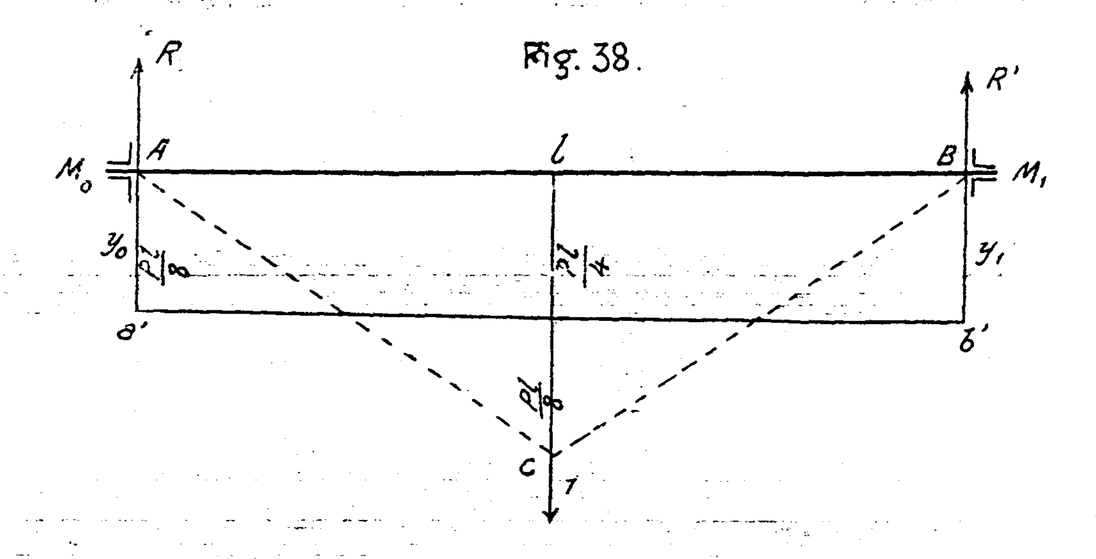
Las reacciones serán las mismas que si la viga no estuviese empotrada.

(b) Caso de una carga en el punto medio.

Razonando como antes se vé que el área del triángulo $ACB = Aa'b'B$ (Fig. 38); luego

$$M_o = M_1 = \frac{1}{2} P \frac{l}{4} = \frac{1}{8} Pl.$$

Fig. 38.



Expresiones analíticas del momento de flexión $M_g = \frac{P}{2}x - \frac{Pl}{8}$, $M_d = \frac{P}{2}(l-x) - \frac{Pl}{8}$

Reacciones $R = R' = \frac{P}{2}$; $M_o = M_1 = \frac{Pl}{8}$

Puntos de inflexión de la Elástica.- Recordando que $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$, se comprende que estos puntos corresponderán á aquellos para los cuales $M=0$. En el caso (b) estarán á $\frac{1}{4}l$ y $\frac{3}{4}l$, según se ve en la figura 38. En el caso (a) se tienen estos puntos escribiendo

$$M = 0 = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} - \frac{1}{12}pl^2 \quad ó \quad x^2 - lx + \frac{1}{6}l^2 = 0$$

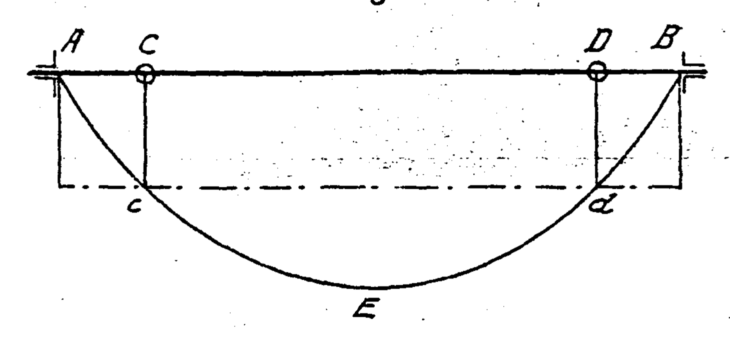
ecuación de segundo grado que resuelta nos da

$$x = \frac{l}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \quad ó \quad x = \begin{cases} 0{,}785.l \\ 0{,}215.l \end{cases}$$

(c) Supongamos que la viga AB (Fig. 39) recibe una carga uniformemente repartida y que además de empotrarla por sus extremos A y B se la divide

en un tramo central por dos articulaciones C y D, de manera que este trozo de viga CD quede simplemente apoyado en C y en D. La continuidad de la viga se interrumpe, y equivale el conjunto á dos vigas AC y DB empotradas por sus extremos A y B, y á otra CD sencillamente apoyada en los extremos C y D de las dos primeras.

Fig. 39.



Cada una de estas vigas estará separadamente en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que recibe; luego los momentos de flexión en C y en D serán nulos, y la recta de cierre pasará por los puntos c, d de la parábola AEB, que corresponden á las abcisas AC y AD de las articulaciones. Supongamos que la recta de cierre c d la trazamos de modo que divida en dos partes iguales á la flecha de la parábola; el momento mayor que tendremos desde el extremo A al B será

$$\frac{1}{2} p \frac{l^2}{8} = \frac{1}{16} p l^2$$

cuyo valor es más pequeño que el mayor $\frac{1}{12} p l^2$ obtenido en el caso (a)$_1$ cuando la viga estaba cargada tambien uniformemente y era continua desde

A hasta B.

Para conocer las abcisas AC y AD correspondientes á las ordenadas $\frac{1}{16}pl^2$, escribiremos la ecuación de la parábola AEB, dando á μ este valor del momento. Resultará por tanto

$$\frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{1}{16}pl^2 \quad ó \quad x^2 - lx + \frac{1}{8}l^2 = 0$$

ecuación de segundo en x, que resuelta da

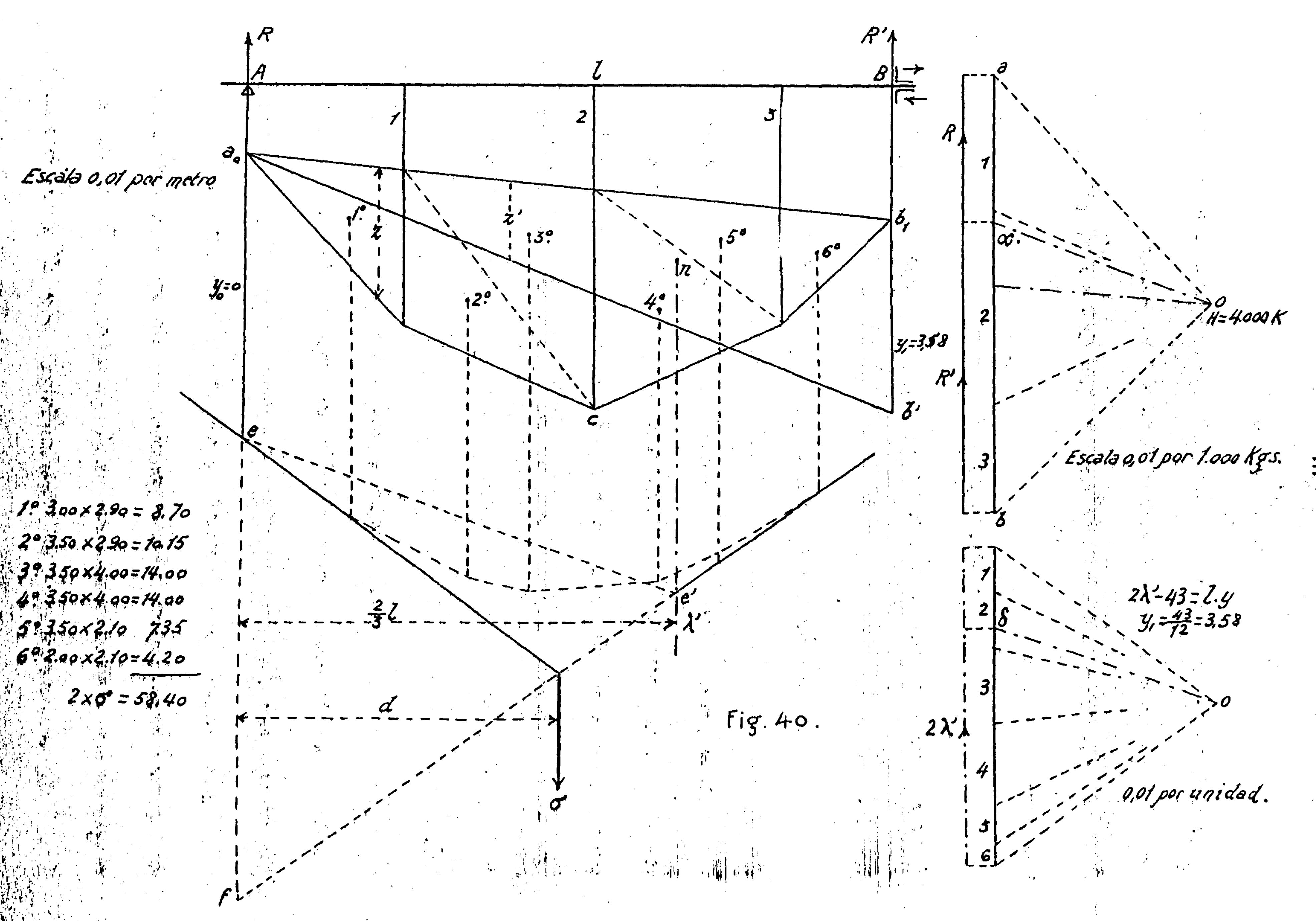
$$AC = DB = 0.15.l$$

Caso 2º Viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro.

Sea AB una viga horizontal apoyada por un extremo A y empotrada por el otro B, solicitada por las cargas 1, 2, 3 y por las reacciones desconocidas M_1, de los apoyos R, R'. La línea de cierre pasará en este caso por el punto a_0, puesto que el momento de flexión es nulo sobre el apoyo A; y bastará, por tanto, conocer la ordenada $b_1 b' = y_1$ (Fig. 40) para trazar dicha recta $a_0 b'$. La primeras de las ecuaciones (2) ó sea

$$\sigma d - \left(\lambda \frac{l}{3} + \lambda' \frac{2}{3} l\right) = 0$$

queda ahora reducida á



R
R'
A
l
B
1
2
3
a_0
b_1
c
b'
Escala 0,01 por metro
$y_0 = 0$
$y_1 = 3,58$
z
z'
n
1°
2°
3°
4°
5°
6°
e
e'
f
λ'
$\frac{2}{3} l$
d
σ
1° 3.00 × 2.90 = 8.70
2° 3.50 × 2.90 = 10.15
3° 3.50 × 4.00 = 14.00
4° 3.50 × 4.00 = 14.00
5° 3.50 × 2.10 7.35
6° 2.00 × 2.10 = 4.20
2 × σ = 58.40
a
b
α
o
H = 4.000 K
Escala 0,01 por 1.000 Kgs.
δ
$2\lambda'$
4
5
6
$2\lambda' \cdot 43 = l \cdot y$
$y_1 = \frac{43}{12} = 3,58$
0,01 por unidad.

Fig. 40.

$$\sigma d - \lambda' \frac{2}{3} l = 0$$

puesto que λ es cero en el caso de que tratamos. De esta ecuación se deduce que el momento de λ' con relación al apoyo A debe ser igual al de σ; pero el de σ vale ef, luego bastará unir e con e' y dirigir por el polo o una recta oδ paralela á ee' para obtener el valor de

$$2\lambda' = y_1 l$$

y deducir de esta relación el que corresponde á y_1.

Para calcular las reacciones R, R' se trazará por el polo o una recta oα paralela á la de cierre $a_0 b'$.

(d) Caso en que la carga está uniformemente repartida á razón de p Kilógramos por unidad de longitud.

En este caso particular tenemos

$$\frac{2}{3} fl \frac{l}{2} = \frac{1}{2} y_0 l \frac{2}{3} l \qquad ó \qquad f = y_0$$

Se deduce de este resultado que la ordenada y_0 que representa el momento de flexión en el apoyo A (Figura 41) es la misma que la correspondiente al momento en el punto medio de la misma viga si estuviese apoyada simplemente por sus extremos. La recta de cierre será a'b'.

Para calcular las reacciones R y R' trazaremos tambien la recta oδ, paralela á la de cierre a'b'.

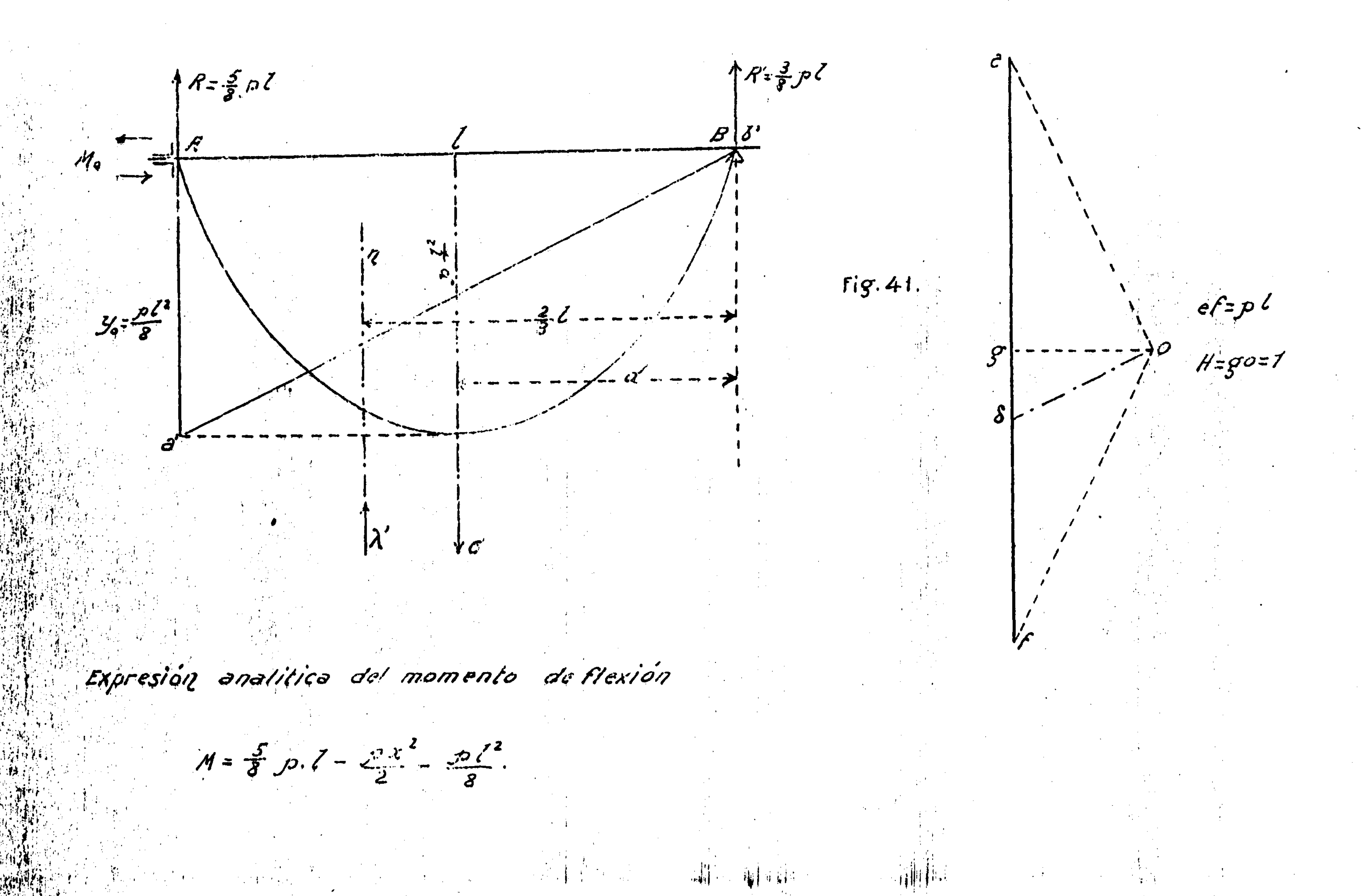


Fig. 41.

Expresión analítica del momento de flexión

$$M = \frac{5}{8}\, p.l - \frac{p x^2}{2} - \frac{p l^2}{8}.$$

Estos valores pueden calcularse analiticamente teniendo en cuenta que el coeficiente angular de está recta vale

$$\frac{pl^2}{8} : l = \frac{pl}{8}$$

puesto que la distancia polar og se supone igual á la unidad de longitud.

En el poligono de fuerzas tenemos además

$$e\delta = eg + g\delta = \frac{pl}{2} + \frac{1}{8} pl = \frac{5}{8} pl$$

luego

$$R = \frac{5}{8} pl \qquad y \qquad R' = \frac{3}{8} pl$$

Nótese que si la misma viga estuviese sobre apoyos simples seria $R = R' = \frac{1}{2} pl$. El apoyo en R tiene por objeto descargar el apoyo B y aumentar la reacción del otro. Este aumento vale $\frac{1}{8} pl$, ó sea $\frac{1}{8}$ de la carga total.

El punto de inflexión de la elástica, ó curva de flexión se determina igualando á cero el valor de M expresado en función de x. Esta función es

$$M = \frac{5}{8} plx - \frac{pl^2}{8} - \frac{px^2}{2} = 0$$

que, déspues de simplificada, queda

$$x^2 - \frac{5}{4} lx + \frac{l^2}{4} = 0$$

ecuación de segundo grado, de la que se obtiene

$$x = \frac{5}{8} l \pm \sqrt{\frac{25}{64} l^2 - \frac{l^2}{4}} = l\left(\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{1}{4}}\right) = l\left(\frac{5}{8} \pm \frac{6}{16}\right) = l\left(\frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}\right)$$

ó $$x = \begin{cases} l \\ \frac{1}{4} l \end{cases}$$

El punto de inflexión se encuentra al cuarto de la longitud de la viga á partir del extremo empotrado.

Caso 3º Viga apoyada por sus extremos y en su punto medio, con carga uniformemente repartida en toda su longitud.

Como en este caso todo es simétrico respecto del apoyo medio de la viga (Fig. 42) no hay razón para que la sección recta de esta en dicho apoyo medio C gire hácia uno ú otro lado. Luego su dirección será invariable y habrá empotramiento en el referido punto C. Cada mitad de la viga se conducirá como si estuviese apoyada por su extremo A ó B y empotrada por el otro C, por lo que este caso se reduce al caso particular (d) anteriormente expuesto.

Se trazarán las parábolas correspondientes á cada tramo, de manera que su flecha sea $\frac{1}{32} p l'^2$, y la horizontal $\underline{c\,d}$ dará el punto b' común á las dos rectas de cierre $a'b'$ que corresponden á cada tramo.

Téngase en cuenta que la longitud de cada uno de estos es l', y l la total de la viga.

Las reacciones serán

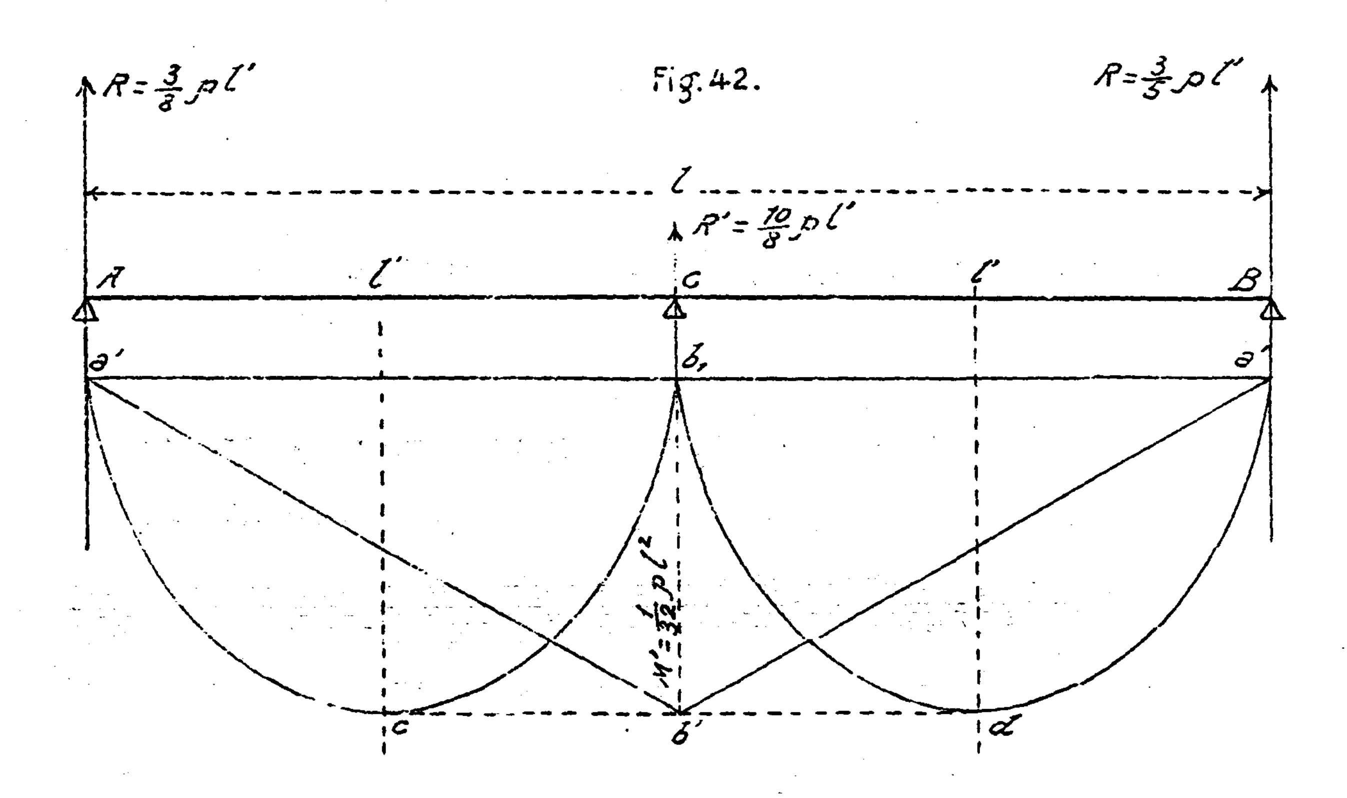


Fig. 42.

$$R = R' = \frac{3}{8}\, p l \;\; „ \qquad R'' = \frac{10}{8}\, p l'$$

El mayor valor del momento de flexión es

$$M' = \frac{1}{32}\, p l^2 = \frac{1}{8}\, p l'^2.$$

Caso 4º - Viga empotrada por un extremo B y apoyada en un punto A de su longitud.

Consideremos la viga DB (Fig. 43) sometida á la acción de las cargas 1, 2, 3, 4, apoyada en el punto A y empotrada en el extremo B. Construido el polígono funicular de estas cargas, vemos que el momento flector para un punto cualquiera

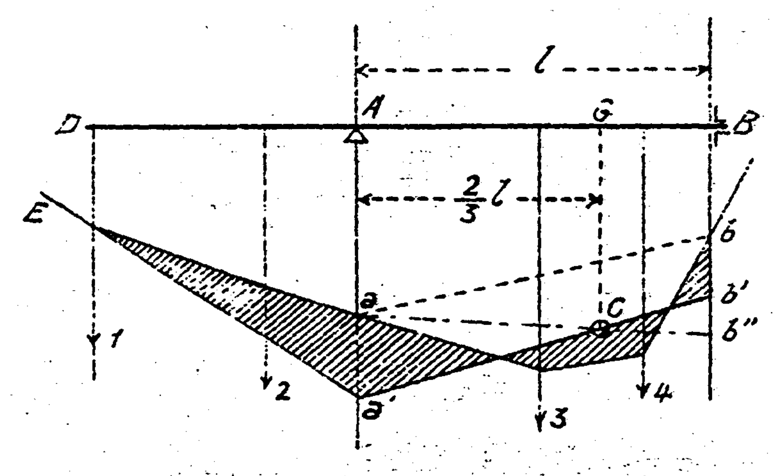


Fig. 43.

de la parte volada DA se conoce desde luego, y por tanto, el punto a' de la recta de cierre a'b' del tramo AB se determinará prolongando el lado E del funicular hasta que encuentre á la vertical A. Vamos á hacer ver que existe otro punto C de esta recta sobre una vertical GC, el cual no cambia de posición por efecto de las cargas que recibe el trozo DA de la viga, y que es, á la vez, un punto de la recta a b" de cierre que hubiéramos obtenido para el tramo AB, atendiendo solo á las cargas 3, 4 que recibe este tramo. Podemos, pues, servirnos del caso 2º para trazar esta recta a b", y por su encuentro con la vertical que pasa por G determinaremos el punto C que buscamos. En efecto, llamemos:

M al momento de flexión en un punto cualquiera del tramo AB bajo la influencia de las cargas 1 y 2.

M' al momento flector en un punto cualquiera del tramo AB desligado de la acción de dichas cargas

Podremos escribir, según se sabe

$$M = \mu + Ax + B \qquad M' = \mu + A'x$$

La ecuación de deformación, referida al tramo AB, daría en general

$$0=\int_0^l Mx\,dx$$

y sustituyendo por M las dos expresiones anteriores, é igualando los resultados tenemos

$$\int_0^l \mu x\,dx + A\int_0^l x^2\,dx + B\int_0^l x\,dx = \int_0^l \mu x\,dx + A'\int_0^l x^2\,dx$$

y despejando á B

$$B=-(A'-A)\frac{2}{3}l$$

Sustituyendo ahora este valor de B en la expresión que nos da M

$$M=\mu+Ax+\frac{2}{3}l(A'-A)=\mu+A\left(x-\frac{2}{3}l\right)+\frac{2}{3}lA'.$$

Esta ecuación no puede determinar el valor de M para un punto cualquiera de AB puesto que contiene la incógnita A, pero si el punto de este tramo fuese el G que dista $\frac{2}{3}l$ del extremo A, entonces queda, por anularse el paréntesis,

$$M_g=\mu_g+\frac{2}{3}lA'$$

valor particular que recibe el momento conocido M' para $x=\frac{2}{3}l$.

De aquí se deduce que el momento flector M, correspondiente al punto G, es el mismo que el que se produciría en este punto si la viga estuviese apoyada en A, empotrada en B y cortada sobre el apoyo A, ó sea desligada de las cargas

que recibe la parte que vuela. La recta de cierre $a'b'$ pasará siempre por el punto C cualesquiera que sean estas cargas.

Caso 5º- Viga empotrada por un extremo.

Sea AB (Fig. 44) una viga horizontal empotrada por un extremo A y solicitada por cargas verticales 1, 2, 3, 4. Se conocen, desde luego, dos puntos de la línea

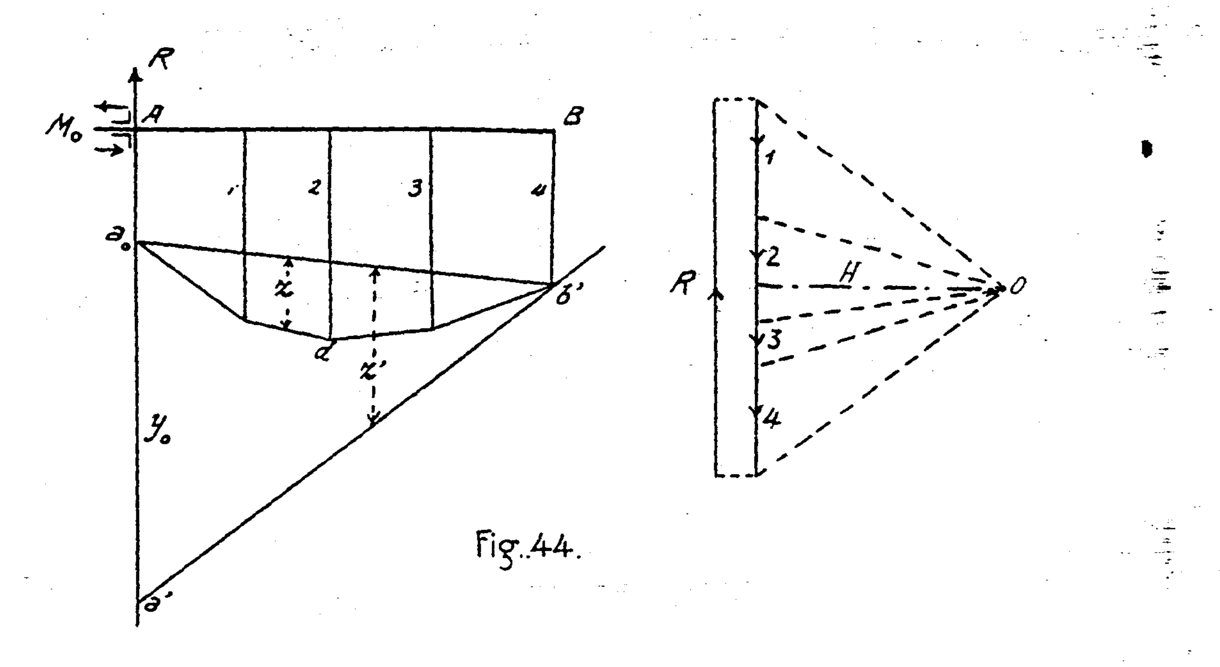


Fig. 44.

de cierre, pues atendiendo á la definición del momento de flexión, resulta éste conocido para los extremos A y B de la viga. Para el primero es la suma de los momentos de las cargas; para el segundo es cero; luego la dirección de $a'b'$ será la del último lado del polígono funicular.

Todos los momentos son negativos, pues siendo $M = H(z-z')$ aparece $z < z'$ para cualquier punto que se tome sobre la directriz AB. La reacción R es igual á

la carga total 1+2+3+4 que recibe la viga.

(e) Caso de una carga en el extremo:

En este caso particular $z = 0$ para cualquier punto de la línea AB (Fig. 45) puesto que el polígono funicular anterior $a_0 d b'$ se confunde con la recta $a_0 b'$.

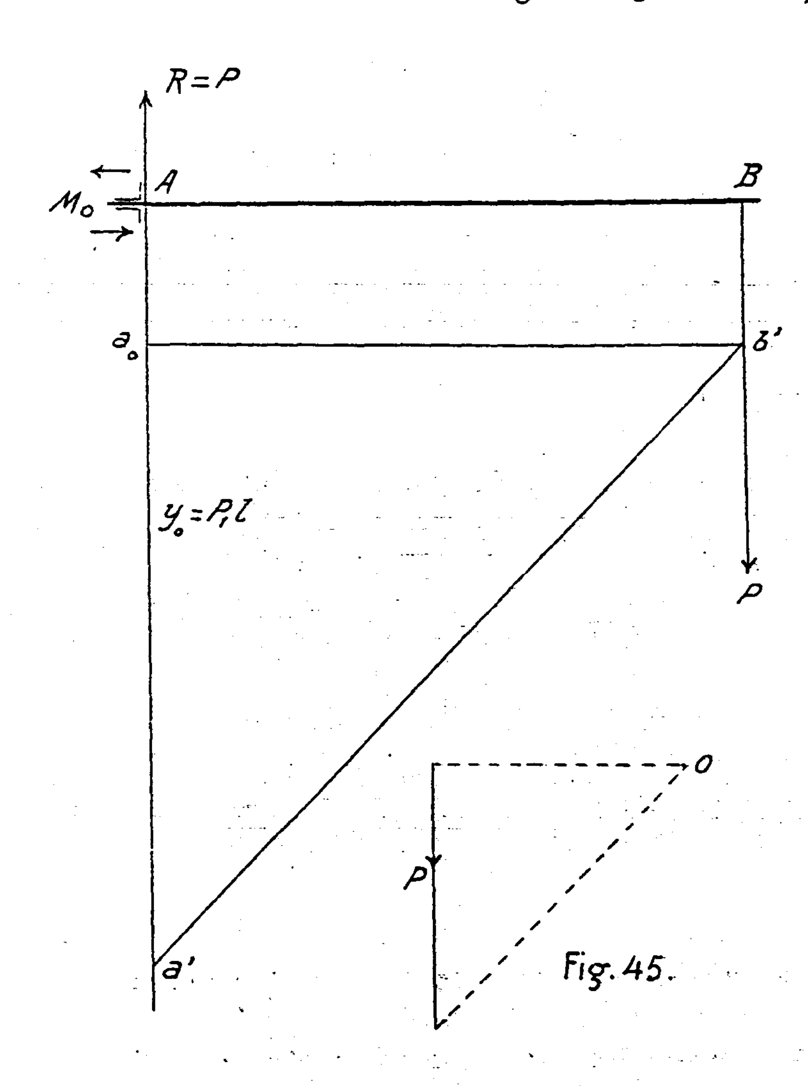


Fig. 45.

El momento de flexión en un punto cualquiera es la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan á la izquierda, ó de todas las que actúan á la derecha, cambiando el signo; luego

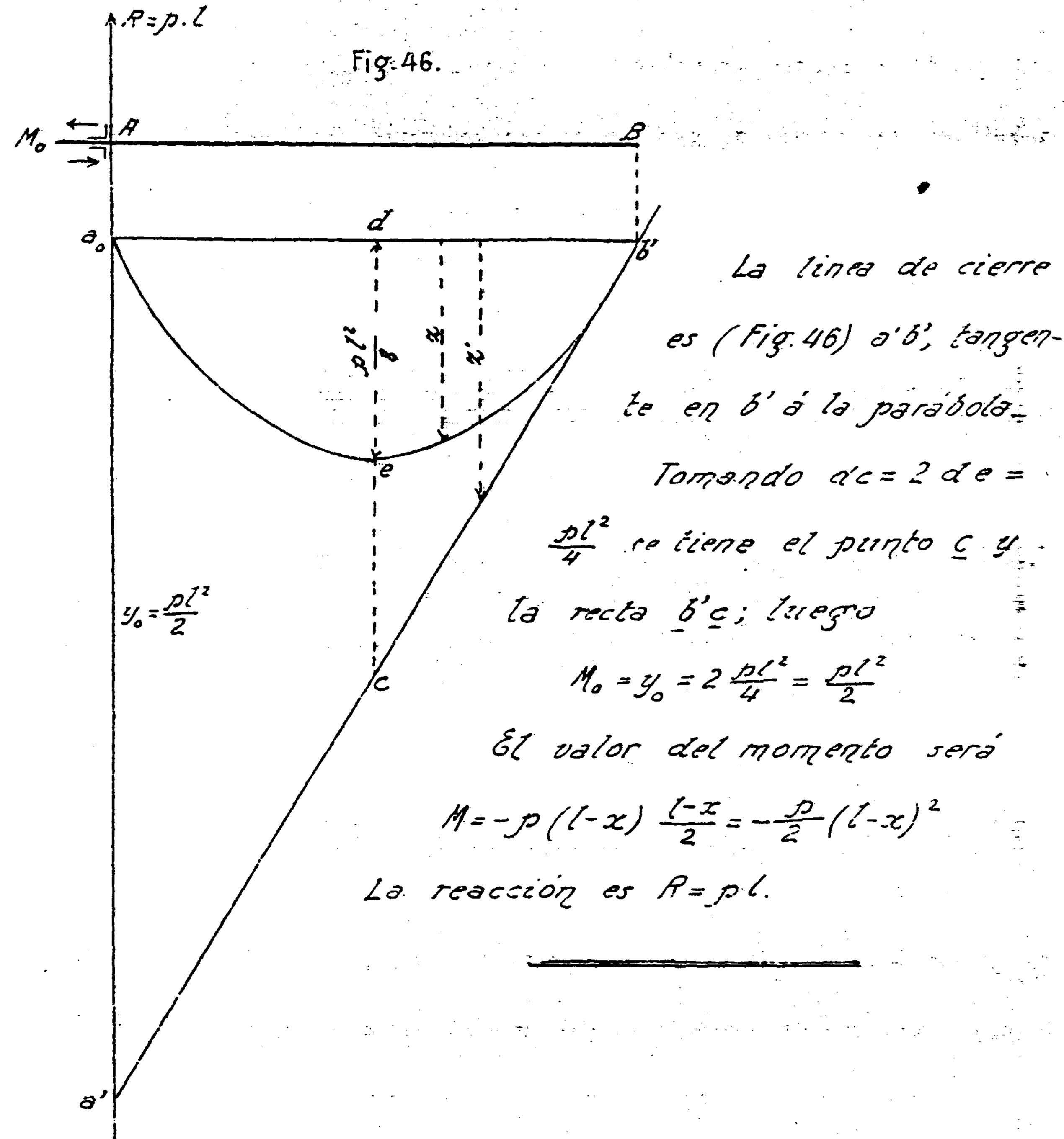
$$M = -P(l - x)$$

El mayor valor de M corresponde á $x = 0$; por lo tanto

$$M = -Pl,$$

y la reacción $R = P$.

(f) Caso en que la carga está uniformemente repartida.



La línea de cierre es (Fig. 46) a'b', tangente en b' á la parábola.

Tomando $dc = 2\,de = \frac{pl^2}{4}$ se tiene el punto c y la recta b'c; luego

$$M_o = y_o = 2\frac{pl^2}{4} = \frac{pl^2}{2}$$

El valor del momento será

$$M = -p(l-x)\frac{l-x}{2} = -\frac{p}{2}(l-x)^2$$

La reacción es $R = pl$.

Resúmen de los casos de flexión correspondientes á las vigas horizontales que son de mayor aplicación.

(Véanse Marvá, nos 404 y 405, y Levy, Tomo II, pág. 132, 133 y 134).

Vigas continuas.- Principios generales relativos á las vigas de sección constante ó variable, con apoyos de nivel ó no, con ó sin empotramiento en sus extremos.

Objeto del problema.

Supongamos una pieza prismática de directriz recta M N (Fig. 47) colocada sobre $n+1$ apoyos, los cuales pueden estar ó no á nivel.

M — A_0, A_1, A_i, A_n, A_{n+1} — N

Fig. 47.

Primero.- *Si los apoyos no están á nivel la pieza, en su estado natural, solo podrá tocar á dos de ellos, y cuando se la cargue de modo que venga á descansar en todos, conoceremos los descensos verticales que recibirán los puntos de la directriz, puesto que dichos desplazamientos se miden por la desnivelación de los apoyos.*

El problema se plantea así:

Hallar los momentos de flexión, esfuerzos cortantes y reacciones de los apoyos de una viga continua some-

tida á cargas dadas, bajo la condición de que n+1 de sus puntos reciban desplazamientos elásticos dados.

Segundo.- *Si los apoyos están á nivel, la viga descansará sobre todos ellos, tanto en su estado natural como después de cargada. Este caso es particular del anterior, puesto que á priori se da un valor nulo á todos los desplazamientos verticales.*

Se plantea el problema de este modo:

Hallar los momentos de flexión, esfuerzos cortantes y reacciones de los apoyos de una viga continua sometida á cargas dadas, bajo la condición de que n+1 de sus puntos no reciban desplazamiento en sentido vertical.

Se admite que los desplazamientos elásticos de una pieza prismática son muy pequeños, por lo que será necesario suponer que las diferencias de nivel de los apoyos son tambien muy pequeñas con relación á la longitud de cada tramo.

En la práctica se procura colocar todos los apoyos á nivel, pero los asientos de obra, errores de nivelación, etc., son causas que motivan su desnivelación, y si esta llega á alcanzar un valor del mismo orden que las deformaciones elásticas

se modifica completamente la intensidad de las fuerzas interiores ó elásticas.

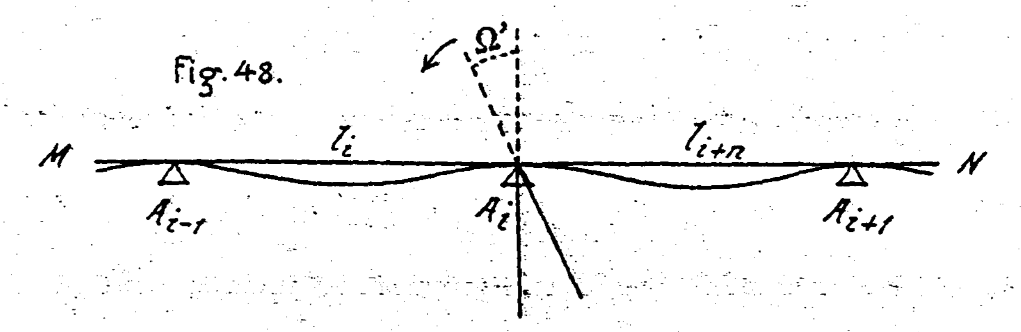
Esto es causa de que se mire con prevención por algunos constructores el empleo de las vigas continuas; pero la economía de material que proporciona su uso reemplazando los tramos discontinuos y las mayores luces que pueden salvar, son ventajas que imponen su adopción.

Convenio sobre el origen de coordenadas.- En el estudio de un tramo cualquiera, tomaremos siempre por origen de coordenadas el apoyo de la izquierda del tramo.

Teorema fundamental.

Si en una viga continua cualquiera (Fig. 48) se consideran dos tramos consecutivos de longitudes l_i, l_{i+1}, limitados por tres apoyos de nivel, A_{i-1}, A_i, A_{i+1};

Fig. 48.



si á lo largo del primero se aplican fuerzas ficticias,

$$\frac{M\,dx}{l_i EI}$$

y á lo largo del segundo otras de valor

$$\frac{M\,dx}{l_{i+1} EI}$$

y se hace la suma de los momentos de estas fuerzas

en cada tramo con relación al apoyo no común las dos sumas que se obtienen son iguales y de signo contrario.

Sea MN la curva de flexión, Ω' el ángulo que gira la sección recta de la viga en el apoyo A_i. La ecuación de deformación para el tramo primero puede escribirse así

$$y = \Omega' x + \int_0^x \frac{M x' dx'}{EI}$$

la misma ecuación para el segundo tramo sería

$$y = -\Omega' x - \int_0^x \frac{M(x-x')dx'}{EI}$$

Llevando las integraciones hasta los apoyos A_i, A_{i+1}, resultará

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\Omega' l_i + \int_0^{l_i} \frac{M x' dx'}{EI} \\ 0 &= -\Omega' l_{i+1} - \int_0^{l_{i+1}} \frac{M(l_{i+1}-x')dx'}{EI} \end{aligned}\right\} (A)$$

eliminando Ω' hallaremos

$$\frac{1}{l_i}\int_0^{l_i} \frac{M x dx}{EI} = -\frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}} \frac{M(l_{i+1}-x)dx}{EI}$$

relación que demuestra el teorema.

Si EI es constante para cualquier punto de la viga, resulta

$$\frac{1}{l_i}\int_0^{l_i} M x dx = -\frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}} M(l_{i+1}-x)dx$$

y si reemplazamos M por su valor $H(z-z')$, (Teorema VIII) tendremos que

$$\frac{1}{l_i}\left(\sigma_i . d_i - \frac{1}{3}\lambda_i l_i - \frac{2}{3}\lambda'_i l_i\right) = -\frac{1}{l_{i+1}}\left(\sigma_{i+1} d_{i+1} - \frac{2}{3}\lambda_{i+1} l_{i+1} - \frac{1}{3}\lambda'_{i+1} l_{i+1}\right) = 0.$$

Luego el teorema fundamental se enunciará también como sigue: Si en una viga continua de sección constante se consideran dos tramos consecutivos de longitudes l_i, l_{i+1}, limitados por tres apoyos de nivel, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, si sobre el primero se aplican fuerzas ficticias verticales $\frac{\sigma_i}{l_i}$, $\frac{\lambda_i}{l_i}$, $\frac{\lambda'_i}{l_i}$, y sobre el segundo otras de igual naturaleza $\frac{\sigma_{i+1}}{l_{i+1}}$, $\frac{\lambda_{i+1}}{l_{i+1}}$, $\frac{\lambda'_{i+1}}{l_{i+1}}$, y se hace la suma de los momentos de estas fuerzas con relación al apoyo no común, las dos sumas que se obtienen son iguales y de signo contrario.

Expresión del momento flector en el punto tercio de un tramo extremo, en función de los momentos de empotramiento sobre los apoyos que le limitan. El momento de flexión en un punto cualquiera de un tramo está dado por la relación

$$M = \mu + Ax + B$$

Sean M' y μ' los valores particulares de M y μ para $x = \frac{1}{3} l$. Análogamente, sean m_1 y m_2 los valores de M para $x=0$ y $x=l$, es decir, los momentos flectores sobre los dos apoyos que limitan el tramo.

Resulta que $A = \frac{m_2 - m_1}{l_1}$ „ $B = m_1$

luego

$$M' = \mu' + \frac{m_2 - m_1}{l_1} \cdot \frac{l_1}{3} + m_1 = \mu' + \frac{m_2 - m_1}{3} + m_1 ;$$

ó bien

$$M' = \mu' + \frac{2}{3} m_1 + \frac{m_2}{3}$$

Esta fórmula enlaza los momentos desconocidos m_1 y m_2 de los apoyos 1.° y 2.° con el momento M' siempre conocido, que ha de producirse al tercio del tramo primero.

Del mismo modo, haciendo $x = \frac{2}{3} l_n$ se obtiene la expresión

$$M' = \mu' + \frac{2}{3} m_{n+1} + \frac{m_n}{3}$$

que servirá para cuando haya empotramiento en el último apoyo $n+1$.

Aplicación del teorema fundamental á dos tramos consecutivos.- Teorema de los tres momentos.

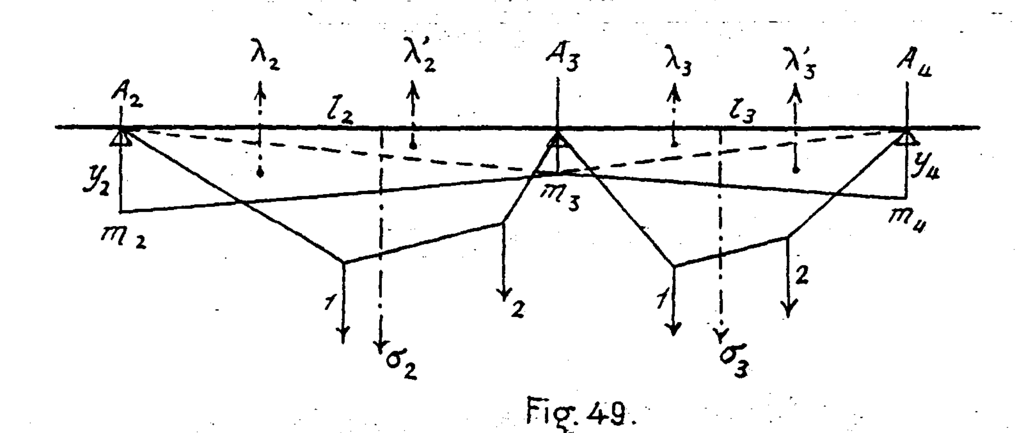


Fig. 49.

Sean $l_2 . l_3$ las longitudes de dos tramos consecutivos (Fig. 49) y llamemos m_2, m_3 y m_4 á los momentos de flexión sobre los apoyos A_2, A_3, A_4; tendremos

$$m_2 = H . y_2 \quad .. \quad m_3 = H . y_3 \quad . \quad m_4 = H . y_4 \,.$$

Recordando que

$$\lambda_2=-y_2\frac{1}{2}l_2 \;,\; \lambda'_2=-y_3\frac{1}{2}l_2 \;,\; \lambda_3=-y_3\frac{1}{2}l_3 \;,\; \lambda'_3=-y_4\frac{1}{2}l_4$$

resulta

$$\lambda_2=-\frac{m_2}{H}\cdot\frac{1}{2}l_2 \;,\; \lambda'_2=-\frac{m_3}{H}\cdot\frac{1}{2}l_2 \;,\; \lambda_3=-\frac{m_3}{H}\cdot\frac{1}{2}l_3 \;,\; \lambda'_3=-\frac{m_4}{H}\cdot\frac{1}{2}l_4 .$$

El teorema fundamental nos dice que

$$\frac{1}{l_2}\left(\sigma_2 d-\frac{1}{3}l_2\lambda_2-\frac{2}{3}l_2\lambda'_2\right)+\frac{1}{l_3}\left(\sigma_3 d'-\frac{2}{3}l_3\lambda_3-\frac{1}{3}l_3\lambda'_3\right)=0$$

ó bien que

$$\frac{\sigma_2 d}{l_2}+\frac{\sigma_3 d'}{l_3}-\frac{1}{3}\lambda_2-\frac{2}{3}\lambda'_2-\frac{2}{3}\lambda_3-\frac{1}{3}\lambda'_3=0$$

y sustituyendo $\lambda_2, \lambda'_2; \lambda_3\ \lambda'_3$ por sus valores tendremos:

$$\frac{H\sigma_2 d}{l_2}+\frac{H\sigma_3 d'}{l_3}+\frac{1}{3}m_2\frac{l_2}{2}+\frac{2}{3}m_3\frac{l_2}{2}+\frac{2}{3}m_3\frac{l_3}{2}+\frac{1}{3}m_4\frac{l_3}{2}=0.$$

Por último, multiplicando por 6 y reduciendo resulta

$$m_2 l_2+2(l_2+l_3)m_3+m_4 l_3=-6\left(\frac{\sigma_2 d}{l_2}+\frac{\sigma_3 d'}{l_3}\right)H .$$

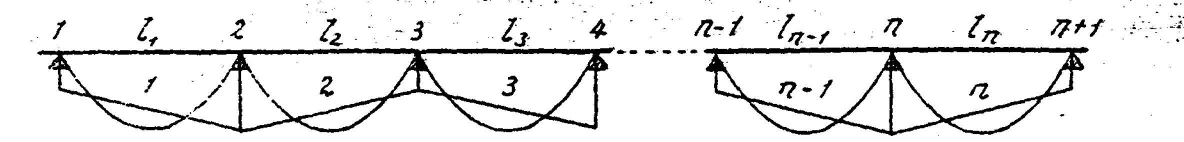
Esta ecuación expresa la relación que existe entre los momentos de flexión correspondientes á tres apoyos 2, 3, 4, consecutivos, y constituye el teorema llamado de "los tres momentos."

Resolución analítica del problema de una viga continua sobre $n+1$ apoyos de nivel, solicitada por carga vertical uniformemente repartida sobre cada tramo.

La viga se compone de n tramos (Fig. 50, sobre cada uno de los cuales actúa una carga p por

unidad de longitud, que puede variar de un tramo á otro. Con una distancia polar igual á la unidad se tra-

Fig. 50.



zan las parábolas de modo que pasen por los apoyos. El problema quedará resuelto tan luego como se fijen las rectas de cierre, pues se conocerá el momento de flexión en cualquier punto de la viga y, por tanto, los esfuerzos cortantes correspondientes á dos puntos infinitamente próximos al apoyo que comprendan entre sí la reacción de este, pudiendo así deducirse el valor de esta reacción.

Las incógnitas del problema son las ordenadas de las rectas de cierre sobre los apoyos, las cuales representan los momentos de flexión sobre estos apoyos.

Sean $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n, m_{n+1}$ estos momentos desconocidos; tendremos $n+1$ incógnitas, y si puede establecerse un sistema de $n+1$ ecuaciones entre ellas, el problema será determinado.

Si escribimos la ecuación que hemos llamado de los tres momentos para cada uno de los $n+1-2=n-1$ apoyos intermedios ó pilas, tendremos un sistema de $n-1$ ecuaciones, que juntamente con las dos que co-

rresponden á los tramos extremos nos dan el sistema de $n-1+2=n+1$ ecuaciones

$n-1$ ecuaciones

$$\begin{cases} \text{Apoyo n.}^o\ 2 \ldots\ l_1 m_1 + 2(l_1+l_2)m_2 + l_2 m_3 = -6\left(\frac{\sigma_1 d}{l_1} + \frac{\sigma_2 d'}{l_2}\right) = -\frac{p_1 l_1^3}{4} - \frac{p_2 l_2^3}{4} \\ \text{--} \\ \text{--} \\ \text{Apoyo n.}^o\ n \ldots\ l_{n-1} m_{n-1} + 2(l_{n-1} l_n) m_n + l_n m_{n-1} = -6\left(\frac{\sigma_{n-1} d}{l_{n-1}} + \frac{\sigma_n d'}{l_n}\right) = -\frac{p_{n-1} l_{n-1}^3}{4} - \frac{p_n l_n^3}{4} \end{cases}$$

Tramo n.º 1 ..... $M' = \mu' + \frac{2}{3} m_1 + \frac{m_2}{3}$

Tramo n.º n ..... $M' = \mu' + \frac{2}{3} m_{n+1} + \frac{m_n}{3}$

Si no hubiese empotramiento sobre los estribos tendriamos $m_1 = 0$, $m_{n+1} = 0$, y bastaria el sistema $n-1$ para resolver el problema. En la eliminación puede emplearse el método de Bezout, llamado de los coeficientes indeterminados (V. Colignon, pág. 3[illegible]).

Una vez calculados los momentos de flexión correspondientes á cada apoyo, se deducirá el M para un punto cualquiera de un tramo comprendido entre dos apoyos, n y $n-1$, por la formulada anteriormente hallada

$$M = \mu + \frac{m_n - m_{n-1}}{l_{n-1}} x + m_{n-1}$$

Esfuerzos cortantes y reacciones de los apoyos.

Tramo $n-1$ ..... $M = \mu + \frac{m_n - m_{n-1}}{l_{n-1}} x + m_{n-1}$

Tramo n .... $M = \mu + \frac{m_{n-1} - m_n}{l_n} x + m_n$.

Hallando la derivada con relación á x de estas funciones y cambiando el signo tendremos los valores

T_n y T_{n+1} para un punto cualquiera de cada tramo,

$$\text{Tramo } n-1 \ldots\ldots\ T_{n-1} = -\frac{d\mu}{dx} + \frac{m_{n-1} - m_n}{l_{n-1}}$$

$$\text{Tramo } n \ldots\ldots\ T_n = -\frac{d\mu}{dx} + \frac{m_n - m_{n+1}}{l_n}$$

y como los primeros términos de los segundos miembros representan el esfuerzo cortante que tendría lugar para un punto del tramo si este fuera independiente, podrán sustituirse respectivamente por

$$p_{n-1}x - \frac{p_{n-1}l_{n-1}}{2} \quad y \quad p_n x - \frac{p_n l_n}{2}$$

luego

$$T_{n-1} = p_{n-1}x - \frac{p_{n-1}l_{n-1}}{2} + \frac{m_{n-1} - m_n}{l_{n-1}} ;$$

$$T_n = p_n x - \frac{p_n l_n}{2} + \frac{m_n - m_{n+1}}{l_n} ;$$

ecuaciones que darán el valor de T para un punto definido por $\underline{x}$. Si en la primera se hace $x = l_{n-1}$ se tendrá el valor de T para el apoyo n; haciendo $x=0$ en la segunda obtendremos el valor de T para el apoyo n; pero estos valores T'_{n-1}, T'_n corresponden á puntos infinitamente próximos que comprenden entre sí la reacción R del apoyo; luego $T'_{n-1} - R = T'_n$ de donde

$$R = T'_{n-1} - T''_n = \frac{1}{2} p_{n-1} l_{n-1} + \frac{p_n l_n}{2} + \frac{m_{n-1} m_n}{l_{n-1}} - \frac{m_n - m_{n-1}}{l_n}.$$

Por consiguiente, vemos que la reacción es igual á la que tendría lugar si la viga no fuera contínua,

ó sea $\frac{p_n l_n}{2} + \frac{p_{n-1} l_{n-1}}{2}$, más otra cantidad que expresa la influencia que sobre el apoyo ejerce la continuidad de la viga.

Este resultado se hubiera obtenido gráficamente dirigiendo por el polo correspondiente á cada tramo una recta paralela á la de cierre y esta paralela determina sobre el polígono de fuerzas el valor del esfuerzo cortante en cada punto infinitamente próximo á los apoyos que limitan el tramo correspondiente.

Aplicación del teorema de los tres momentos.-

Consideremos una viga a b (Fig. 51) apoyada en tres puntos á nivel, cargada uniformemente sobre toda su longitud l, á razón de p Kilogramos por unidad de longitud.

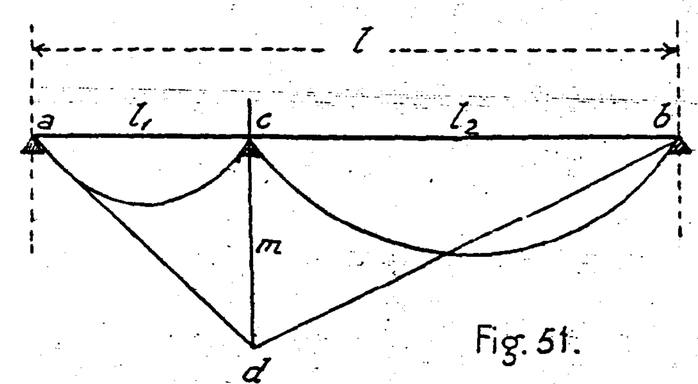


Fig. 51.

Vamos á buscar la posición que ha de ocupar el apoyo intermedio C para que sea nula la reacción del apoyo extremo a. Si esta reacción ha de ser cero, es preciso que la recta de cierre a d sea tangente en a á la parábola a c: luego el momento sobre el apoyo c valdrá $m = -\frac{1}{2} p l_1^2$.

Según el teorema de los tres momentos, tenemos

en este caso

$$2(l_1+l_2)m=-\frac{1}{4}p\,(l_1^3+l_2^3)$$

ó $$2lm=-\frac{1}{4}p(l_1^3+l_2^3)$$

de donde $$m=-\frac{1}{4}p\,\frac{l_1^3+l_2^3}{2l}$$

Sustituyendo en vez de m el valor que debe tener para que sea cero la reacción del apoyo a, resulta

$$-\frac{1}{2}\,p\,l_1^2=-\frac{p}{8l}\,(l_1^3+l_2^3) \quad ó \quad l_1^3+l_2^3-4l.l_1^2=0$$

Pero vemos que $l_2=l-l_1$, y sustituyendo

$$l_1^3+(l-l_1)^3-4l.l_1^2=0$$

Desarrollando y reduciendo se obtiene

$$l_1^2+3l.l_1-l^2=0,$$

ecuación de segundo grado en l_1, que resuelta da

$$l_1=0{,}302\,l<\frac{1}{3}\,l.$$

Podremos decir, por tanto, que toda vez que la distancia del apoyo intermedio á uno de los extremos sea igual ó mayor que la tercera parte de la longitud total l de la viga, las reacciones de los apoyos extremos no serán cero y estarán dirigidas hacia arriba.

Cálculo gráfico de una viga continua sobre varios apoyos á nivel.

Método de Mohor. *Sea $A_0 A_4$ (Fig. 52-a) una viga continua colocada sobre cinco apoyos. El primero y el segundo tramo reciben una carga uniformemente repartida; el tercero una sola P; y el cuarto soporta cuatro cargas concentradas. Construyamos un polígono funicular referente á las cargas que cada tramo recibe, de manera que la distancia polar h, expresada en Kilógramos, sea la misma para todos y que sus lados extremos pasen por los apoyos.*

Los momentos de flexión se conocerán cuando se hayan trazado las líneas de cierre correspondientes á cada tramo; las ordenadas de estas rectas en los apoyos serán las incógnitas del problema que nos proponemos resolver.

Representación gráfica del teorema fundamental. *Sean σ_1, λ_1, λ'_1 y σ_2, λ_2, λ'_2 las fuerzas ficticias verticales que suponemos aplicadas á dos tramos consecutivos (fig. A); Construyamos un polígono funicular*

para cada tramo con una distancia polar H arbitraria,

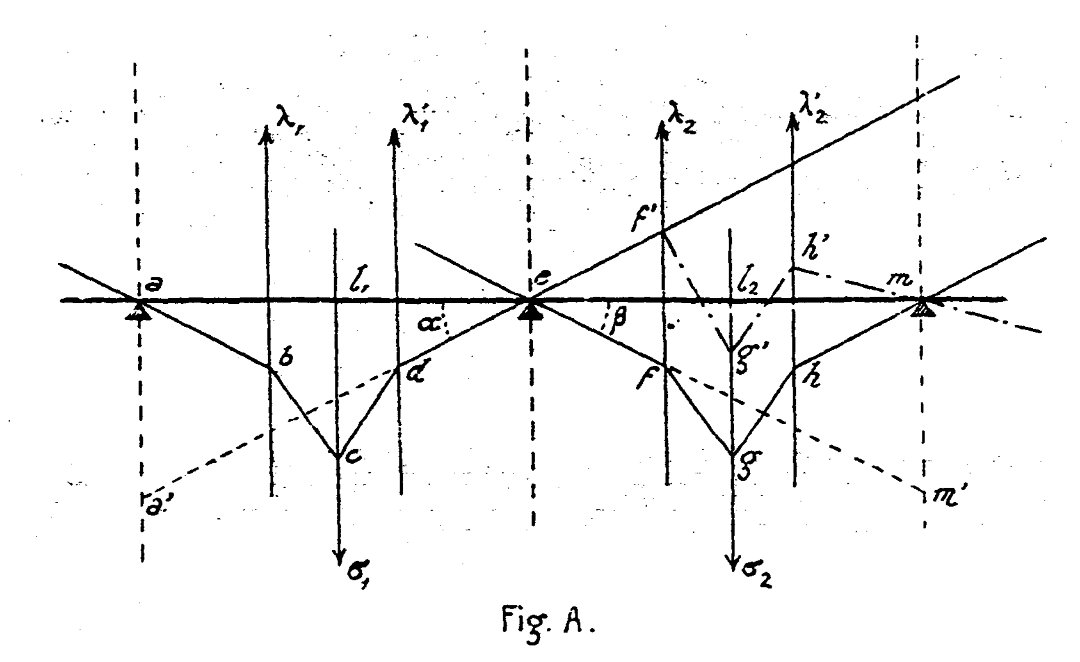


Fig. A.

pero común á los dos polígonos, y cuyos lados extremos pasen por los apoyos que limitan el tramo. Estos polígonos serán, el $abcde$ para el primero, y el $efghm$ para el segundo. De la inspección de la figura y del enunciado del teorema se deduce que

$$H\frac{aa'}{l_1} + H\frac{mm'}{l_2} = 0,$$

$$aa' = l_1 . tg\,\alpha$$

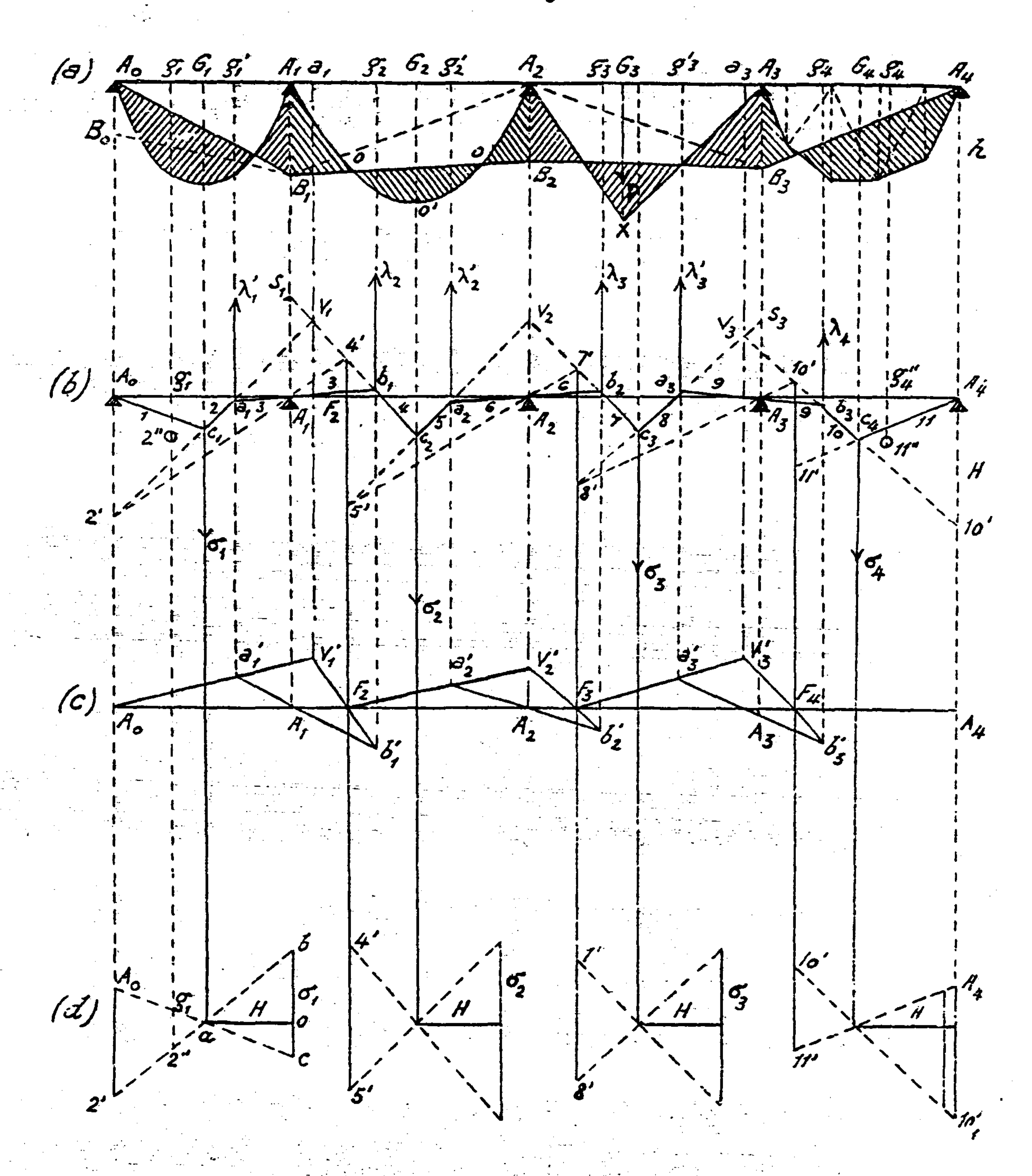
de donde $$\frac{aa'}{l_1} = tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = 0 \quad ó \quad tg\,\alpha = -tg\,\beta;$$

luego los angulos α y β son suplementarios, y por tanto el lado ef debe ser el ef', prolongación del ed, y el nuevo polígono será $ef'g'h'm$.

Caso primero.- Todos los apoyos de la viga son simples. Supongamos trazado el polígono funicular correspondiente á las fuerzas ficticias de cada tramo, de manera que

Fig. 52



Escala de fuerzas ....

Id. de longitudes ....

Id. de superficies.. σ ... λ ...

Distancia polar h = ... Kgs.

Id. id. H = ... mts.

1º La distancia polar H (arbitraria) sea común para todos; 2º Los lados extremos pasen por los apoyos que limitan el tramo; 3º Estos lados coincidan.

Tendremos un polígono funicular de todo el sistema de fuerzas $\sigma \lambda \lambda'$ que será el A_0 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, A_4 (Fig. 52-b). Veamos á que condiciones debe satisfacer este polígono para deducir de ellas la manera de trazarle.

(a) Los tres vértices a_1, V_1, b_1 del triángulo $a_1 V_1 b_1$ que se obtiene prolongando los lados 2 y 4, se hallarán sobre las verticales λ'_1 V_1 λ_2, de las cuales son conocidas de posición las λ'_1 y λ_2. La vertical V_1 pasará por el punto a_1 (Fig. 52-a), cuya distancia al punto tercio g_2 es igual á $A_1 g'_1$. En efecto, la resultante de λ'_1 y λ_2 pasa por el punto de encuentro V_1 de los lados 2 y 4; el punto a_1 de esta resultante divide á la longitud $g'_1 g_2$ en dos partes $a_1 g'_1$ y $a_1 g_2$ que están en razón inversa de las intensidades de λ'_1 y λ_2; luego podremos escribir (Fig. B)

$$ad : de :: b e' : a' b \quad \text{ó sea} \quad \lambda'_1 : \lambda_2 :: a_1 g_2 : a_1 g'_1$$

pero

$$\lambda'_1 : \lambda_2 :: \tfrac{1}{3} l_1 : \tfrac{1}{3} l_2 \quad \text{ó} \quad \lambda'_1 : \lambda_2 :: A_1 g'_1 : A_1 g_2$$

de donde se deduce que

$$a_1 g_2 : a_1 g'_1 :: A_1 g'_1 : A_1 g_2$$

Si se toma $a_1 g_1' = A_1 g_2$, deberá resultar

$$a_1 g_2 = A_1 g_1'.$$

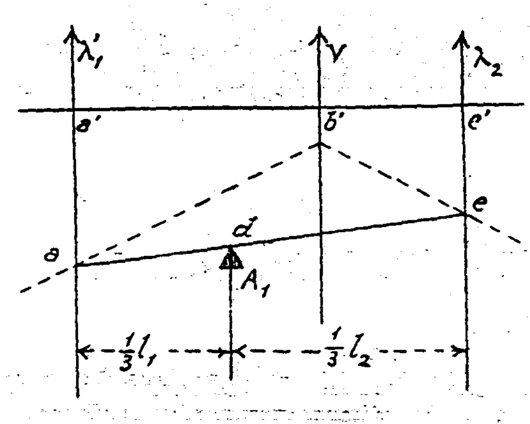


Fig. B.

El punto de paso a_1 de la vertical V_1 se conoce en función de las longitudes l_1, l_2 de los tramos contiguos al apoyo A_1. Lo mismo puede decirse para los otros triángulos $a_2 V_2 b_2$ y $a_3 V_3 b_3$ correspondientes á los apoyos A_2, A_3.

(b) Los lados $a_1 V_1$, $a_1 b_1$ y $V_1 b_1$ del triángulo $a_1 V_1 b_1$ (Fig. 52-b) pasan respectivamente por los puntos 2', A_1 y 4', de los cuales se conoce el segundo por ser apoyo, y los otros dos se determinan como sigue:

Punto 2'. El momento de la fuerza ficticia σ_1 con relación al apoyo A_0 será

$$\sigma_1 . A_0 G_1 = H \times A_0 2'$$

Para determinar esta distancia $A_0 2'$ se traza un triángulo a b c (Fig. 52-d) que tenga un vértice en la línea de acción σ_1, cuya altura sea horizontal é igual á la distancia polar H, y la base igual á σ_1. Estas cantidades σ_1 y $A_0 2'$ se medirán á la misma escala, que puede ser arbitraria (n centímetros ó milímetros por m².) La prolongación de los lados ba y ca dará $A_0 2'$ sobre la vertical que pasa por A_0. Esta longi-

tud se lleva á la figura (b); desde A_o, para marcar el punto 2' buscado.

Punto 4'- De lo que llevamos dicho respecto del triángulo a, V, b, (Fig. 52-b), se deduce que cualquiera que este sea, deberá tener sus vértices sobre las verticales λ'_1, V_1, λ_2; que el lado a, b, pasará por el punto conocido A_1, y que el a, V_1 prolongado pasará por el punto 2' que acabamos de determinar; luego según el teorema de Desargües, el tercer lado V, b, deberá pasar así mismo por un punto 4' de la recta 2'A_1; pero se sabe además por el mismo teorema que si el punto 2' recorriese la vertical A_o 2', el punto 4' que buscamos se movería sobre una vertical 4'F_2. Para determinar esta recta vertical se traza (Fig. 52-c) un triángulo cualquiera a', b', V', cuyos lados a', V', y a', b', pasen por los puntos A_o y A_1, y sus vértices se hallen sobre las verticales λ' V, λ_2. La recta $A_o A_1$ cortará al lado V', b', en el punto F_2, y este punto marcharía por la vertical F'_2 si el A_o recorriese la vertical A_o.

El encuentro de la recta 2'A_1 que pasa por los dos puntos fijos, (Fig. b) con la vertical F_2 dará el punto 4' que se buscaba para el lado $V_1 b_1$.

(c) Lo que acabamos de decir respecto á los

puntos 2', 4', A_1, de los lados del triángulo $a_1 V_1 b_1$, podria repetirse para los 5', A_2 y 7' que pertenecen á los lados del $a_2 b_2 V_2$, y para 8', A_3 y 10' que corresponden á los del $a_3 V_3 b_3$. Las verticales F_3 y F_4 se trazarán como la F_2, y los puntos 5', 8' y 11' se determinarán por las longitudes respectivas 4'5', 7'8' y 10'11', y estas se calcularán como se calculó la A_0 2' en la figura (d).

Conocidas ya las condiciones (a) (b) y (c) que acaban de verse, determineremos el polígono funicular A_0...... A_4 de la manera siguiente:

1º Se trazarán las verticales V_1 V_2 V_3

2º Id id id F_2 F_3 F_4

3º Se calculará la longitud A_0 2' y se marcará el punto 2'.

4º Se trazará la recta 2'A_1 que dará el punto 4' sobre la vertical F_2.

5º Se calculará la longitud 4'5' (Fig. d) y se señalará el punto 5' en la figura b.

6º Se trazará la recta 5'A_2 que dará el punto 7' sobre la vertical F_3.

7º Se calculará la longitud 7'8' (Fig. d) y se señalará el punto 8' en la figura b.

8º Se trazará la recta 8'A_3 que dará el punto

10' sobre la vertical F_4.

9º Se calculará la longitud 10' 11' (Fig. d) para marcar el punto 11' en la figura b.

10º Se trazará la recta 11' A_4, que será un lado del polígono funicular que se busca, puesto que 11' y A_4 son puntos de dicho lado.

11º Uniendo el punto C_4 con el 10' tenemos el lado 10, del polígono. Este lado deberá pasar, además por otro punto 10', tal que tengamos A_4 10'. $H = \sigma_4 . A_4 6_4$. La longitud A_4 10' está calculada en la figura d.

12º Uniendo el punto V_3 con el 8' tendremos el lado 8. Los puntos a_3, A_3, b_3 corresponden al lado 9.

13º Uniendo c_3 con 7' resulta el lado 7.

14º Uniendo V_2 con 5' resulta el lado 5; los puntos a_2 A_2 b_2 corresponden al lado 6.

15º Uniendo el punto c_2 con el 4' tenemos el lado 4.

16º Uniendo V_1 con 2' se determina el lado 2; los puntos a_1 A_1 b_1 corresponden al lado 3.

17º Uniendo c_1 con A_0 se obtiene el lado 1, quedando terminado el trazado del polígono funicular A_0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 A_4

Determinación de los momentos de flexión sobre

los apoyos. *Habiéndose trazado el polígono $A_0 \ldots\ldots A_4$ es facil calcular el momento de flexión sobre cada apoyo, ó sean las ordenadas de la recta de cierre de cada tramo. Observemos que el momento de la fuerza ficticia λ_2 respecto al apoyo A_1 será $A_1 S_1 \times H = \lambda_2 \frac{1}{3} l_2$ (Fig. 6), ó*

$$A_1 S_1 \times H = \frac{1}{2} A_1 B_1 \times l_2 \cdot \frac{1}{3} l_2$$

Las longitudes $A_1 S_1$ y l_2 se medirán á la escala de longitudes del dibujo. Bastará despejar en esta ecuación $A_1 B_1$ y llevarla á la figura a para conocer el punto B_1 de la primera línea de cierre $A_0 B_1$. De igual modo se calcularían $A_2 B_2$ y $A_3 B_3$ y así quedarían trazadas las cuatro líneas de cierre y el problema resuelto y terminado.

Caso segundo. *Supongamos que hay empotramiento en el primer apoyo. Será preciso conocer la ordenada $A_0 B_0$ de la recta de cierre $B_0 B_1$. En el primer tramo tendremos la fuerza λ_1 desconocida que representa el área del triángulo $A_0 B_0 B_1$, y cuya línea de acción vertical pasará por el punto g_1, tercio del tramo. El lado 1 del polígono funicular (Fig. 6) estará ahora sustituido por otros dos, de las cuales el primero pasará por A_0 y el segundo se apoyará en las verticales λ_1 σ_1. La dirección del pri-*

mero coincide con la de la viga, según vamos á ver.

Sea $A_o A_1$ (Fig. 53) el primer tramo de la viga; λ, σ_1, λ'_1 las fuerzas ficticias; 1,2,3,4 el polígono funicular de distancia polar H, que pasa por los apoyos $A_o A_1$, construido para dichas fuerzas.

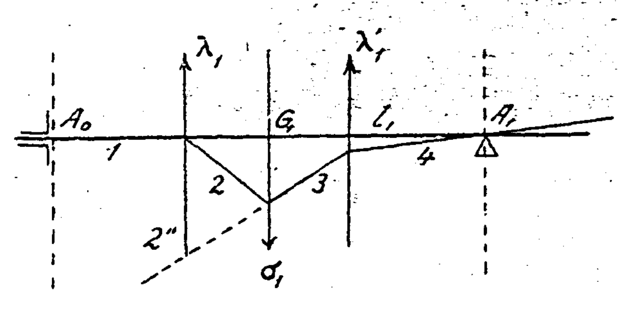


Fig. 53.

Aplicando á este tramo la ecuación de deformación

$$y = \omega_o x - \int_o^x \frac{M(x-x')\,dx'}{EI}$$

desde $x=o$ á $x=l$, resulta

$$o = \int_o^l M(l-x)\,dx \quad \text{ó} \quad \sigma_1 . A_1 G_1 - \lambda_1 \frac{2}{3} l_1 - \lambda'_1 \frac{1}{3} l_1 = o$$

De esta expresión se deduce que la suma de los momentos $\sigma_1 \lambda_1 \lambda'_1$ con relación al apoyo A es cero, y, por tanto, el lado 1 debe cortar al 4 en el punto A_1; en consecuencia de esto el lado 1 debe coincidir con la recta $A_o A_1$. El punto fijo 2' de la figura 52-b será ahora el 2", y la vertical λ_1 será en este caso lo que fué la A_o en el anterior para trazar el polígono $A_o \ldots\ldots\ldots A_4$. Este trazado se hará de igual modo que en el caso anterior y las ordenadas de las rectas de cierre serán conocidas.

Las reacciones de los apoyos se deducen de los valores que toman los esfuerzos cortantes para dos puntos infinitamente próximos al apoyo.

Determinación analítica de las flechas de las vigas.

Ecuaciones de deformación

$$\begin{cases} y = \omega_0 x - \int_0^x \frac{M(x-x')dx'}{EI} \\ y = \Omega x + \int_0^x \frac{Mx'dx'}{EI} \\ \Omega = \omega_0 - \int_0^x \frac{Mdx}{EI} \end{cases}$$

1° Vigas sobre dos apoyos simples.

Caso a.- *Peso P en el punto medio. (Fig. 54)*

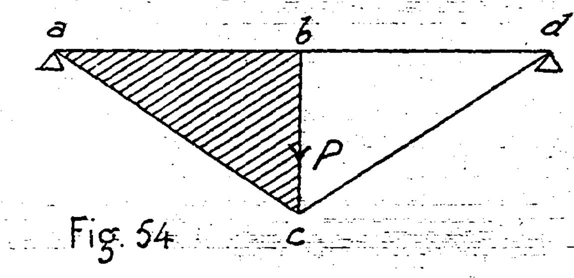


Fig. 54

La flecha corresponde al punto medio, y se obtiene por la segunda ecuación

$$f = \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{Mxdx}{EI}$$

ó sea el momento estático de la superficie a b c; luego

$$f = \left(\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\right)\frac{1}{EI} = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

Caso b.- *Carga P por unidad de longitud repartida uniformemente (Fig. 55)*

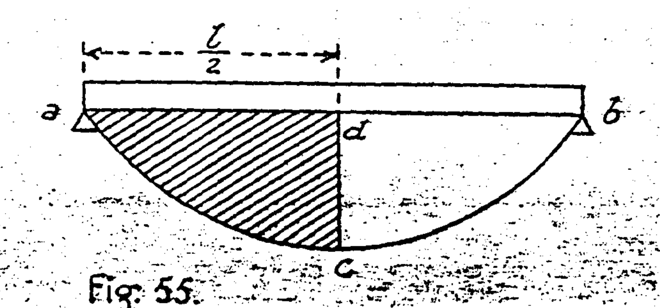


Fig. 55.

La flecha corresponde

al punto medio y se obtiene por la ecuacion segunda, poniendo en lugar de M, $p\frac{l}{2}x-\frac{px^2}{2}$

$$f=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{(p\frac{l}{2}x-\frac{px^2}{2})x\,dx}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pl}{2}x^2dx-\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px^3}{2}dx\right)$$

ó bien

$$f=\frac{1}{EI}\left(\frac{pl}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{l^3}{8}-\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{l^4}{16}\right)=\frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{128}\right)=$$

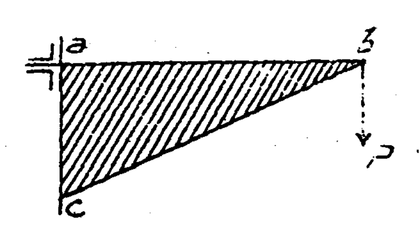
$$=\frac{5}{384}\cdot\frac{pl^4}{EI}=\frac{5}{384}\cdot\frac{Pl^3}{EI}=0{,}013\ \frac{P.l^3}{EI}.$$

Vemos tambien en este caso, que la flecha se determina por el momento estático de la superficie acd de momentos flectores, rayada en la figura

2º Vigas empotradas.

Caso c. Peso P en el extremo. (Fig. 56)

La flecha corresponde al extremo, y se determina por la primera ecuación



$$f=-\int_0^l\frac{M(l-x)\,dx}{EI}$$

ó sea calculando el momento estático, respecto al extremo b, de la superficie negativa abc de momentos flectores.

Fig. 56.

Luego

$$f=\frac{1}{EI}\cdot Pl\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}l=\frac{1}{3}\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

Caso d.- Peso uniformemente repartido (Fig. 57).

La superficie negativa de momentos está limitada

en este caso por el contorno mixtilineo a b c d a, y tal superficie es la diferencia entre la superficie del triángulo abc y la de la parábola a d c. Puede verse en este caso como en el anterior, que la flecha es el momento, respecto al punto b, de la superficie negativa de momentos flectores.

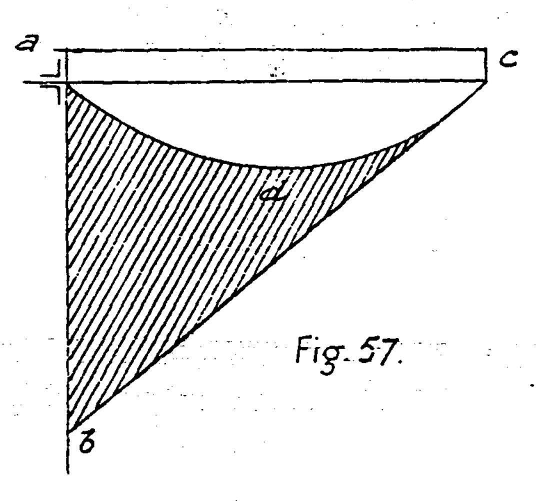


Fig. 57.

Luego

$$f = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pl}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}l - \frac{2}{3}\cdot\frac{Pl}{8}\cdot l\cdot\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EI}\,Pl^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{Pl^3}{EI}.$$

Caso e. *Peso P en el punto medio (Fig. 58)*

La flecha corresponde al punto medio y se determina por la segunda ecuación. La integral representa la suma de los momentos estáticos de las superficies abc y ced, respecto á la vertical ba, siendo negativo el primero y positivo el segundo.

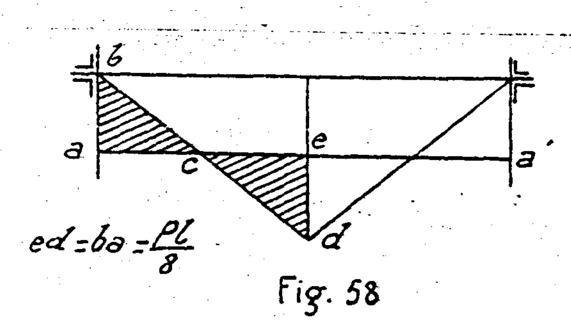


Fig. 58

$$f = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pl}{8}\cdot\frac{l}{8}\left(\frac{l}{4}+\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right) - \frac{Pl}{8}\cdot\frac{l}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\,\frac{Pl^3}{64}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{12}-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{192}\,\frac{Pl^3}{EI}.$$

Caso f. *Peso p por unidad de longitud, reparti-*

do uniformemente. (Fig. 59)

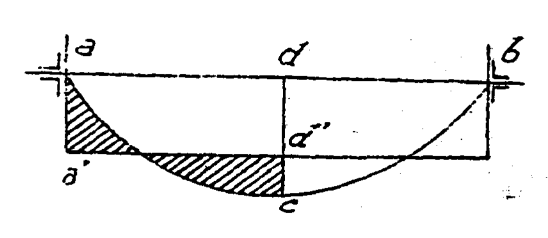


Fig. 59.

La flecha corresponde al punto medio y se determina por la segunda ecuación. Vemos que su valor se hallará calculando el momento estático de la superficie rayada, respecto al punto $\underline{a}$, ó bien restando del momento de la superficie $a\,c\,d$ el de la $a\,a'\,d'\,d$. El primer momento es el calculado en el caso b: luego podremos escribir

$$f = \frac{1}{EI}\left(\frac{5}{384}\,Pl^3 - \frac{1}{12}\,Pl \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}\right) = \frac{1}{EI}\,Pl^3\left(\frac{5}{384} - \frac{1}{96}\right) = \frac{1}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EI}.$$

— Resúmen —

Viga sobre apoyos simples	caso a	$f = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
	caso b	$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
Viga empotrada por un extremo	caso c	$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
	caso d	$f = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
Viga empotrada por ambos extremos	caso e	$f = \frac{1}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
	caso f	$f = \frac{1}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

En general

$$f = K\,\frac{Pl^3}{EI}$$

siendo K un número fraccionario que depende de la naturaleza del problema.

(Vease Marvá, núm^s 404 y 405)

Continúa la segunda ó tercera edición de la Mecánica aplicada de D. José Marvá; deben consultarse los números siguientes:

475 - 476 - Tabla del nº 471, Casos nº^s 1, 2, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 29, 30, 35 y 36 - 488 - 489 - 491 - 499 - 500 - 501 - 502 - 504 - 507 - 508 - 510 - 511 - 512 - 513 - 514 - 517 - 521 - 522 - 523 - 524 - 525 - 526 - 527 - 555 - 556 - 557 - 558 - 559 - 560 - 566 - 573 al 586.

PIEZAS RECTAS COMPRIMIDAS SEGÚN SU EJE.

(Marvá, n°s 674 - 678 - 679 - 687 - 688 - 689 - 690)

Consideremos una pieza prismática recta, de longitud $AB = l$ (Fig. 60) sometida á la acción de las dos fuerzas P, P, que se equilibran y se suponen aplicadas á los centros de gravedad de las secciones rectas extremas A y B de la pieza.

Si esta pieza es rigurosamente rectilinea y si las fuerzas P se reparten uniformemente sobre las secciones extremas, deberá permanecer recta dicha

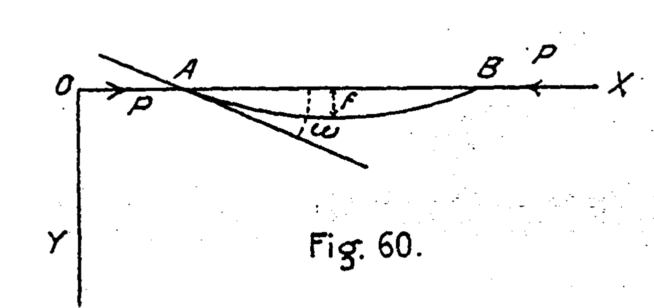


Fig. 60.

pieza, y el valor de las fuerzas elásticas ó interiores, desarrolladas en una sección normal, se conocerá por la ecuación de resistencia $R' = \frac{P}{\omega}$. Pero si estas condiciones no se cumplieran, podria ocurrir que la pieza tomase una ligera curvatura bajo la acción de las fuerzas P, debiendo entonces aparecer en la ecuación de resistencia el segundo término $\frac{Mr}{I}$. El valor de este término dependerá de la flecha que tome la pieza, y se comprende facilmente que no todos los valores de P podrán doblar ó pandear la pieza. Cuando esta flexión ó pandeo tenga lugar habrá cierta relación entre la intensidad de P y el valor de la flecha.

Vamos á buscar esta relación para los cuatro casos siguientes:

1º Pieza articulada en sus extremos.

2º Id empotrada por uno y libre por otro

3º Id id id y articulada en el otro.

4º Id empotrada en los dos.

1er caso.- Supongamos que la pieza puede girar

libremente por sus extremos, que estos permanecen sobre la recta A B, y que las fuerzas P actuan según esta recta. Tomemos por eje de las x la dirección primitiva del eje de la pieza, y por eje de las y una perpendicular al anterior situada en el plano en que se produce la flexión.

La ecuación diferencial de la elástica es. (Levy, T. 2.° pag. 15)

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

en la que I es el momento de inercia correspondiente á un eje normal al plano en que se produce la flexión. Esta tiene lugar por donde encuentra la pieza mayor facilidad para doblarse, y, por consiguiente, según un plano normal al eje de menor momento de inercia; luego el valor de I que consignamos en esta ecuación, será, para el caso que nos ocupa, el de este momento menor de inercia.

Sustituyendo por M su valor Py, correspondiente á un punto cualquiera de la pieza resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI} = -my \quad \left(\text{haciendo } \frac{P}{EI} = m\right)$$

Multiplicando por $2\,dy$ é integrando entre o y x

$$\int_0^x 2dy\frac{d^2y}{dx^2} + \int_0^y m2ydy = 0 = \int_0^x 2\frac{dy}{dx}\,d\frac{dy}{dx} + \int_0^y m\,2y\,dy$$

ó bien

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \omega^2 + my^2 = 0$$

para $y = f$,, $\frac{dy}{dx} = 0$; luego $\omega_0^2 = mf^2$ y sustituyendo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - m\left(f^2 - y^2\right) = 0$$

separando las variables y extrayendo la raiz cuadrada

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{m}\sqrt{f^2-y^2}} = \frac{dy}{f\sqrt{m}\sqrt{1-\left(\frac{y}{f}\right)^2}} = \frac{\frac{dy}{f}}{\sqrt{m}\sqrt{1-\left(\frac{y}{f}\right)^2}}$$

integrando

$$x = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ arc } \left(\text{sen} = \frac{y}{f}\right)$$

y por último

$$y = f \text{ sen } \sqrt{m} \cdot x = f \text{ sen } \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x$$

que es la ecuación de la sinusoide, cuya forma es la que indica la figura 61.

Esta curva es periódica é indefinida; corta al eje de las XX en los puntos A, B, C, D en que sen $\sqrt{m}$, $x = 0$, y es nula la curvatura.

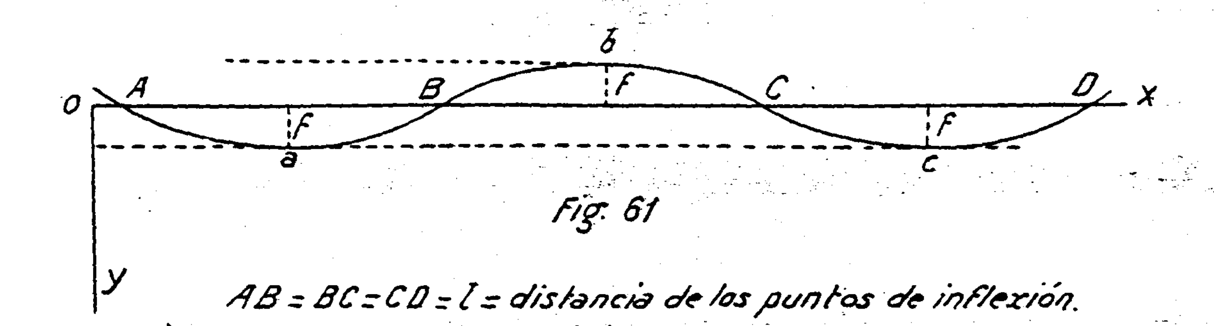


Fig: 61

AB = BC = CD = l = distancia de los puntos de inflexión.

Dicha propiedad se deduce de la ecuación

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$$

pues siendo $M = 0$ en dichos puntos, por ser la recta

AD línea de acción de las fuerzas P, dicha ecuación nos dice que $p = \infty$.

Si la pieza no se ha de doblar es preciso que $f=0$. Ahora bien, f deberá ser nulo, si para $x = l$ resultase

$$\sqrt{m} \times l < K\pi.$$

En efecto: y debe ser cero para $x=l$, pero sen $\sqrt{m}.l$ no puede ser nulo según hipótesis; luego f debe ser cero si

$$\sqrt{m}.l < K\pi \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}.\,l < K\pi$$

De aquí se deduce que

$$P < K^2 \frac{EI\pi^2}{l^2}$$

es decir, que P debe ser menor que la fuerza $K^2 \frac{EI\pi^2}{l^2}$ si no ha de producir la flexión lateral de la pieza. El menor valor de esta fuerza corresponde á $K=1$ y al menor momento I. Puede escribirse, por tanto, para el caso primero

$$P_1 < \frac{EI\pi^2}{l_1^2}$$

designando por l_1 la longitud que separa los puntos de inflexión de la sinusoide.

2º caso. Supongamos que hay empotramiento en el extremo A, y que el otro puede moverse libremente en el plano de las X bajo la acción de la fuerza P, de dirección paralela á OX.

Fig. 62.

La curva AB será en este caso el trozo AB (Fig. 61) de la sinusoide, para el cual su longitud $l_2 = \frac{1}{2} l_1$.

Luego la expresión general deberá modificarse sustituyendo l_1 por $2l_2$, y tendremos en el 2º caso

$$P_2 < \frac{EI\pi^2}{4l_2^2}$$

3er caso. Supongamos que hay empotramiento en un extremo y articulacion en el otro, de manera que la forma de la elástica sea la cb (Fig. 63). Tendremos en a un punto de inflexion pudiendo admitirse que $ca = \frac{1}{3} cb$ proximamente.

O c a b x Y

Fig. 63

La longitud l_1 que separa los puntos de inflexión a y b será $\frac{2}{3} l_3$; resulta

$$P_3 < \frac{9}{4} \frac{EI\pi^2}{l_3^2} \text{ ó } 2\frac{EI\pi^2}{l_3^2}$$

4º caso. Supongamos que los extremos esten empotrados. La forma de la elástica será la del trozo de curva abc (Fig. 61) en la cual $ac = 2BC = 2l$; luego $l_1 = \frac{l_4}{2}$, y por tanto en este caso tendremos:

$$P_4 < 4\frac{EI\pi^2}{l_4^2}$$

En general, podemos decir que la fuerza P no podrá producir la flexión lateral ó pandeo si tenemos

$$P < \alpha . \frac{EI\pi^2}{l^2} \qquad (1^a)$$

$$\text{siendo } \alpha = \begin{cases} 1 \text{ para el caso } 1^{\circ} \ldots\ldots \text{ articulaciones.} \\ \frac{1}{4} \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 2^{\circ} \ldots \text{ articulación y extremo libre.} \\ 2 \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 3^{\circ} \ldots \;\; \text{id} \;\; \text{y empotramiento.} \\ 4 \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 4^{\circ} \ldots\ldots \text{ empotramientos.} \end{cases}$$

De aquí resulta que para el mismo material y teniendo la pieza igual sección y longitud, es preciso mayor fuerza P para doblarla según el orden de los casos 4.º, 3.º, 1.º y 2.º

Este límite superior de la compresión P, expresado en cada caso por

$$\frac{\alpha E I \pi^2}{l^2}$$

crece con el momento de inercia I de la sección, ó reduciendo la longitud l de la pieza, pero es evidente que su valor no podrá exceder á la carga de fractura por aplastamiento, ó sea $\overline{R'}\omega$. Luego siempre deberemos tener la desigualdad

$$\overline{R'}\omega > \frac{\alpha E I \pi^2}{l^2} > P$$

ó bien

$$\overline{R'}\omega > \frac{\alpha E I \pi^2}{l^2} = P_0$$

designando por P_0 la carga de fractura, variable, que origina la flexión lateral ó pandeo en el momento de producirse la fractura.

El menor momento de inercia I de la sección transversal á una pieza, puede expresarse: bien en

función de su radio de inercia r, ó ya en función de la menor dimensión b que presente dicha sección en dirección normal al eje de aquel momento; es decir,

$$I = \omega . r^2 = \omega . \frac{1}{\eta} . b^2 .$$

Luego el valor consignado para P_o podrá expresarse de las tres formas siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} P_o = \alpha . \dfrac{E I \pi^2}{l^2} . \text{———} & 1^a \\ P_o = \alpha E \pi^2 . \dfrac{\omega r^2}{l^2} . \text{———} & 2^a \\ P_o = \alpha E \pi^2 . \dfrac{\omega}{\eta} . \dfrac{b^2}{l^2} . \text{———} & 3^a \end{array}\right\} \text{ ó simplificandolas}$$

$$P_o = A . \omega . \left(\frac{b}{l}\right)^2 .$$

Por tanto, la desigualdad anterior podria escribirse

$$\bar{R}' \omega > \alpha \frac{E \pi^2}{\eta} . \omega \left(\frac{b}{l}\right)^2 .$$

y resolviendola con relación á l resulta

$$l > \pi b \sqrt{\frac{\alpha}{\eta} \frac{E}{R'}} = K b ,$$

siendo $K = \pi \sqrt{\dfrac{\alpha}{\eta} \dfrac{E}{R'}} = F(\alpha , E , \bar{R}' , \eta)$

De esta segunda desigualdad podemos deducir tambien que la fractura irá acompañada de flexión lateral ó pandeo si la longitud l de la pieza es mayor que las K longitudes transversales b, luego

toda vez que la relación $\frac{l}{b}$ exceda al número K, ó bien que si

$$\frac{l}{b} > K = F(\alpha, E, \bar{R}', \eta)$$

la pieza podrá doblarse y romperse bajo una carga P_0 menor que la de aplastamiento $\bar{R}'\omega$. El número K, y, por tanto, la flexión lateral, dependerá á la vez, según se vé, del modo como se dispongan los extremos de la pieza, de la rigidez y resistencia que posea el material, de la forma de la sección transversal y de la menor dimensión que esta sección presente.

Expresión de los coeficientes de fractura para los casos en que $l > K$.

Hemos visto que cuando $l > K$ debemos tener tambien

$$\bar{R}'\omega > P_0$$

ó bien, dividiendo por ω

$$\bar{R}' > \frac{P_0}{\omega}.$$

El valor $\frac{P_0}{\omega}$ será el coeficiente de fractura correspondiente á la fuerza P_0 que produce el pandeo en el momento de la fractura. Designemos este coeficiente por $\bar{R}'_1$; siempre tendremos que

$$\bar{R}' > \frac{P_0}{\omega} = \bar{R}'_1$$

Sustituyendo á P_0 por los tres valores que hemos visto anteriormente resultan las tres ecuaciones siguientes

$$\bar{R}' \left\{ \begin{array}{ll} \bar{R}'_1 = \alpha E \pi^2 \frac{I}{\omega l^2} & \ldots 1^a \\ \bar{R}'_1 = \alpha E \pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2 & \ldots 2^a \\ \bar{R}'_1 = \alpha \frac{E \pi^2}{n} \left(\frac{b}{l}\right)^2 & \ldots 3^a \end{array} \right.$$

que expresan el valor de $\bar{R}'_1$ en función de distintas

variables.

Pero de dichas ecuaciones se deduce que $\bar{R}'_1$ es proporcional á $\frac{I}{\omega l^2}$, $(\frac{r}{l})^2$, $(\frac{b}{l})^2$, y llamando A y A' á los productos constantes $\alpha E \pi^2$ y $\alpha \frac{E\pi^2}{n}$, escribiremos:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}'_1 &= A\frac{I}{\omega l^2} \\ \bar{R}'_1 &= A(\frac{r}{l})^2 \\ \bar{R}'_1 &= A'(\frac{b}{l})^2 \end{aligned}\right\} \text{ecuaciones } A.$$

Ahora bien, como algunas veces conviene relacionar $\bar{R}'$ con $\bar{R}'_1$, vamos á buscar otra expresión de $\bar{R}'_1$ en función de $\bar{R}'$. De lo dicho resulta

1º que $\bar{R}'_1 < \bar{R}'$

2º que $\bar{R}'_1$ es proporcional á $\begin{cases} \frac{I}{\omega l^2} \\ (\frac{r}{l})^2 \\ (\frac{b}{l})^2 \end{cases}$

luego podremos decir:

1º Que el valor de $\bar{R}'_1$ es una fracción propia de $\bar{R}'$.

2º Que el valor numérico de esta fracción habrá de ser variable con las relaciones $\frac{I}{\omega l^2}$, $(\frac{r}{l})^2$ y $(\frac{b}{l})^2$.

Dicha fracción será menor que la unidad, por tanto de la forma $\frac{1}{1+F}$, y el término F será proporcional á las relaciones $\frac{\omega l^2}{I}$, $(\frac{l}{r})^2$ y $(\frac{l}{b})^2$, que son inversas de las anteriores.

Llamando en este caso B y B' á los coeficientes de proporcionalidad, haremos

$$F = \begin{cases} B\dfrac{\omega l^2}{I} \\ B\left(\dfrac{l}{r}\right)^2 \\ B\left(\dfrac{l}{\delta}\right)^2 \end{cases}$$

Y la segunda expresión de $\bar{R}'_1$ que buscamos podrá tener una de las tres formas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}'_1 &= \frac{\bar{R}'}{1+B\dfrac{\omega l^2}{I}} \\ \bar{R}'_1 &= \frac{\bar{R}'}{1+B\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \\ \bar{R}'_1 &= \frac{\bar{R}'}{1+B\left(\dfrac{l}{\delta}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones } B.$$

En resumen, vemos que las ecuaciones A y B que quedan consignadas nos dan el coeficiente de fractura que ha de considerarse para determinar la sección ω de una pieza recta comprimida cuando la relación $\frac{l}{\delta}$ exceda á cierto límite K.

Si multiplicamos por ω ambos miembros de las ecuaciones (A) y (B) obtendríamos las cargas de fractura, y de estas deduciríamos las permanentes correspondientes á dicha pieza, mediante el coeficiente de seguridad que adoptáramos.

Forma más conveniente de la sección transversal de una pieza comprimida.

Examinando la fórmula general

$$P_o = \alpha \frac{EI\pi^2}{l^2}.$$

hemos visto que P_o es tanto mayor cuanto mayor sea I (menor de los momentos de inercia). La carga que puede soportar una pieza sin doblarse crece con I, y la sección más conveniente que deberá tener para prevenir esta flexión será la circular ó poligonal regular, puesto que para estas secciones las elipses centrales de inercia son círculos.

Además, siendo $I = \omega r^2$, á igual valor de ω crece I con el radio r de giro, el cual aumenta cuando la materia se aleja del centro de figura. Las secciones anulares ó tubulares son las que deben adoptarse para columnas, soportes, etc., y en general para toda pieza comprimida de gran longitud.

Comparemos por ejemplo el peso que pueden soportar dos columnas para igual longitud y superficie de sección recta, siendo una de ellas maciza y la otra hueca.

P' columna maciza $\quad I = \omega \frac{d^2}{16} = \frac{\pi}{64} d^4$.

P columna hueca $\quad I = \frac{\pi}{64}\left(d_2^4 - d_1^4\right) = \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right)\left(\frac{d_2^2 + d_1^2}{16}\right) = \omega\, \frac{d_2^2 + d_1^2}{16}$

luego $$\frac{P'}{P} = \frac{d^2}{d_2^2 + d_1^2}$$

ó $$P' < P$$

El estudio teórico de las piezas rectas comprimidas, en las cuales puede producirse la flexión lateral, nos ha hecho ver:

1º Que esta deformación tendrá lugar toda vez que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1ª $\bar{R}'\omega > P_o = \alpha \frac{EI\pi^2}{l^2}$ $\qquad$ 2ª $l > K\delta$

2º Que pudiendo doblarse la pieza, se deduce el coeficiente de trabajo de una de las ecuaciones (A) ó (B); y

3º Que de no haber flexión lateral, se determina este coeficiente por la ecuación sencilla $\bar{R}' = \frac{P}{S}$.

El primer resultado de la teoria no coincide con los de los experimentos practicados, pues los límites que estos han dado para P_o, l y K son inferiores á los calculados. Este desacuerdo se explica por no ser posible realizar en las experiencias lo que la teoria su-

pone al desarrollar sus cálculos. Ésta admite que la compresión se opera exactamente según el eje del prisma, mientras que los centros de presión correspondientes á sus diversas secciones, no coinciden con sus centros de gravedad, por lo cual hay un valor para M que tiende á doblar la pieza cuando se la comprime.

Fórmulas prácticas. Éstas se derivan y toman su forma de las ecuaciones A y B que hemos consignado anteriormente, para expresar el valor del coeficiente $\overline{R}'_1$ y son:

$$\overline{R}'_1 = A\left(\frac{b}{l}\right)^2$$

$$\overline{R}'_1 = \frac{\overline{R}'}{1+B\left(\frac{l}{b}\right)^2} = \frac{\overline{R}'}{\alpha+\beta_1\left(\frac{l}{b}\right)^2}$$

Llamando x á la relación $\frac{l}{b}$ y haciendo $\overline{R}'_1 = y$ tendremos

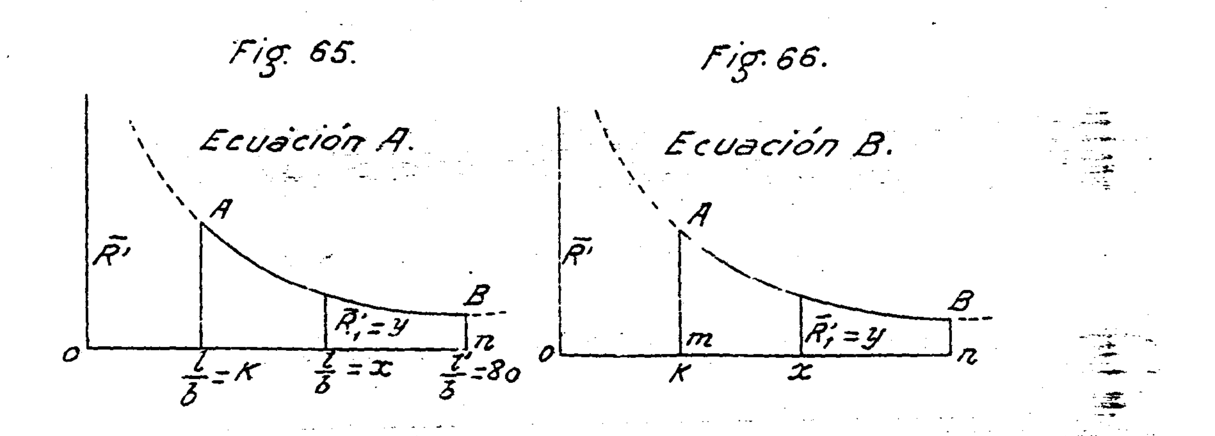
$$y = \frac{A}{x^2} \qquad (A)$$

$$y = \frac{\overline{R}'}{1+Bx^2} = \frac{\overline{R}'}{\alpha+\beta x^2} \qquad (B)$$

Estas ecuaciones dan los valores de y ó de $\overline{R}'_1$ que se hayan obtenido experimentalmente, ensayando piezas rectas para las cuales la relación $\frac{l}{b}$ está comprendida entre el límite inferior K y el superior que comunmente tiene aquella en el arte de la construcción.

Rompiendo piezas de escuadrias y longitudes conocidas, para las cuales la relación $\frac{l}{b}$ tiene un valor

tal que la flexión se manifieste en la rotura han podido construirse los lugares geométricos (Figs 65 y 66) que representan las ecuaciones A y B. Los límites inferiores m de la relación $\frac{l}{b}$ son distintos para los diversos materiales que se ensayan.



Los límites superiores $\frac{l}{b}$ dependen de las dimensiones que en la práctica de la construcción se da á este género de soportes.

Para relaciones $\frac{l}{b}$ menores que el límite experimental o m, la rotura se efectúa por compresión simple.

Hechos los trazados para diversos experimentos, se buscan los valores de las constantes A, α y β, según que se desée emplear la primera ó la segunda ecuación, de modo que queden satisfechos dentro de los límites o m o n de la variable x. Debe notarse que esta variable es un número, y que, por lo tanto, en la ecuación primera representará A

una carga por unidad superficial de la misma especie que son y ó $\bar{R}'_1$. En la segunda serán α y β coeficientes numéricos independientes de toda unidad de medida, ya sea de fuerza ó de longitud.

Casos que se presentan en la práctica.- *Cuando se quiere que el prisma se conduzca como si teóricamente estuviese empotrado, se terminan sus extremos por una base de gran anchura que se asegura al resto de la construcción por medio de enlaces convenientemente estudiados. Si las secciones extremas no se aseguran como queda dicho, la flexión lateral puede producirse con más facilidad, y la pieza se considera entonces como articulada por sus extremos. Los casos prácticos que se han de estudiar son los siguientes:*

H { Caso 1º *Empotramiento en los dos extremos*
Caso 2º *Empotramiento por uno y articulación por otro.*
Caso 3º *Articulación en los dos extremos.*

Considerando la fuerza P del caso 1º como unidad, sabemos que la compresión para el caso 2º ha de ser $\frac{1}{2}$ P, y para el 3º será $\frac{1}{4}$ P.

DETERMINACIÓN PRÁCTICA DE LAS SECCIONES

Maderas

Rondelet.- Los experimentos se hicieron rompiendo piezas de pino y de encina de excelente calidad, cuyo coeficiente de fractura, $\overline{R}'_1$ por aplastamiento para ejemplares cortos era de 420 Kgs. por centímetro cuadrado, término medio. El coeficiente $\overline{R}'_1$ disminuye según aumenta la relación $\frac{l}{b}$. La flexión en la rotura se manifiesta cuando $\frac{l}{b} = \begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases}$. La tabla de Rondelet (Marvá nº 695) da los valores de $\overline{R}'_1$ para los de $\frac{l}{b}$ correspondientes á

1 - 12 - 24 - 36 - 48 - 60 - 72

Las relaciones de resistencia $\frac{\overline{R}'_1}{\overline{R}'} = m$ tienen por objeto poder formar diversos coeficientes de fractura $\overline{R}'_1$ cuando el de aplastamiento $\overline{R}'$ que corresponde á la clase de madera que se emplea es distinto de 420 Kgs. por centímetro cuadrado.

El coeficiente de trabajo le tomaremos al décimo, es decir

$$R'_1 = \frac{1}{10} \overline{R}'_1$$

Conocido de este modo R'_1 se calcula la sección

por la fórmula $R'_1 = \frac{P}{ab}$.

Morin.- Sigue igual método que Rondelet, pero el número de relaciones $\frac{l}{b}$ que comprende su tabla entre 1 y 72 es mayor que los consignados en la de este. Se expresan además los coeficientes de trabajo R'_1 calculados á $\frac{1}{7}$ de $\overline{R}'_1$ (Marvá, pág. 752)

Hodgkinson. Este experimentador inglés parte de las fórmulas prácticas A

$$\overline{R}'_1 = A \frac{I}{\omega l^2}$$

Hizo ensayos de fractura por compresión, sirviéndose de piezas prismáticas de madera aseguradas por sus dos extremos. Empleó encina y pino rojo, cuyos coeficientes de aplastamiento $\overline{R}'$ eran, respectivamente 543 y 462 Kgs. por cm^2

Deduce las fórmulas siguientes en las que P es la carga permanente:

Sección rectangular......... $P = A \frac{ab^3}{l^2}$

Id cuadrada........... $P = A \frac{b^4}{l^2}$

Id circular.......... $P = A'\omega \frac{d^2}{l^2}$

Los coeficientes A y A' (que son Kgs. por cm^2) tienen valores distintos según las clases de madera (Marvá, pág. 754). Los límites extremos $\frac{l}{b}$ en los experimentos de Hodgkinson fueron 30 y 45. Para relaciones inferiores á 30 dan estas fórmulas valores excesivos para la

carga permanente. Debe emplearse la formula de Hodgkinson cuando $\frac{l}{b} = \begin{cases} 28 \\ 72 \end{cases}$. La tabla de Maruá, pág. 756, da los valores de R_1' para las relaciones comprendidas entre 28 y 72, los cuales se han calculado por la fórmula de Hodgkinson. Las longitudes a, b, l, deben expresarse en centímetros.

M. Barré. Ha utilizado los experimentos de Rondelet para expresar analíticamente la carga permanente P, ó el coeficiente de trabajo R_1', ya sea para secciones rectangulares, cuadradas ó circulares, adoptando la formula práctica que establecimos anteriormente.

Sección rectangular ó cuadrada.... $P = \frac{R'\omega}{\alpha + \beta\left(\frac{l}{b}\right)^2}$

Sección circular .... $P = \frac{R'\omega}{\alpha + \beta'\left(\frac{l}{b}\right)^2}$

Los coeficientes numéricos $\alpha, \beta \beta'$ son menores que la unidad.

El peligro de la flexión lateral empieza, según Barré, cuando $l > 5$ ó 6 veces la menor dimension transversal b.

Para una sección de forma cualquiera se empleará la fórmula general (B)

$$P = \frac{R'\omega}{\alpha + \beta \frac{l^2 \omega}{E}}$$

en la que los coeficientes α y β son tambien menores

que la unidad y distintos de los anteriores.

Todos estos resultados se refieren á las piezas prismáticas comprendidas en el primer caso de los H. Para el 2º ó 3º basta multiplicar por $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$ el resultado que se obtiene para el 1º En resumen, los experimentos de Rondelet, Morin, Hodgkinson y Barré no llevan otro fin que definir un coeficiente de trabajo R_1' ó fijar una carga permanente P para una relación determinada $\frac{l}{b}$, correspondiente á la pieza que se calcula.

Aplicaciones:

1ª Conocida $\omega \frac{l}{b}$, calcular P, carga permanente

2ª Conocida Pl, calcular ω, ó sea la escuadria.

La solución de estos problemas se facilita mucho empleando las tablas 1, 2, 3, 4 y 5 de Marvá, pág. 772 á 776; las que llevan los nºs 1, 2, 3 y 4 se han calculado sirviendose de la fórmula de Hodgkinson para secciones cuadradas y valores de la relación $\frac{l}{b}\begin{cases}28\\72\end{cases}$. Para tomar en consideración los casos en que $\frac{l}{b}$ es menor que 28 y mayor que 12 se ha formado la tabla nº 5, utilizando las relaciones de Morin con un coeficiente R' = 60 Kgs. por cm², lo que supone una madera de las condiciones ordinarias de resistencia. Para $\frac{l}{b} < 12$ se admite que $R_1' = R' = 60$ Kgs. por cm²

Sección cuadrada. $\left\{\begin{array}{l} \text{Datos } \omega \frac{l}{b}, \text{ hallar } P \\ \quad ,, \quad Pl \quad ,, \quad b \end{array}\right\}$ Marvá nº 711.

Sección rectangular. Tenemos en este caso la relación siguiente entre las cargas

Seccion cuadrada..... $P = A\frac{b^4}{l^2}$

Id rectangular...... $P' = A\frac{ab^3}{l^2}$

de donde $\frac{P}{P'} = \frac{b}{a}$

siendo $a > b$.

Fundición

Fórmulas de Hodgkinson. Este hace sus experimentos con columnas macizas y huecas de excelente fundición gris, de grano fino y de coeficiente de fractura R' por aplastamiento de 81,33 Kgs. por $^m/m^2$. Deduce las consecuencias siguientes:

1ª Cuando los extremos de las columnas estan redondeados, la resistencia es un tercio de la que tendria si sus bases fuesen anchas y planas. Si la extensión de esa base plana aumenta, crece tambien la resistencia.

2ª A igual cantidad de material ó de área ω, resiste más una columna si tiene ensanchamiento en el centro.

3ª A igual valor de ω resiste más la columna

hueca que la maciza. Debe procurarse que el espesor en las huecas sea uniforme.

4ª La rotura es por aplastamiento simple si $\frac{l}{d} < 5$

La rotura es por aplastamiento y flexión si $\frac{l}{d} \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 25 \end{matrix} \right.$

La rotura es por flexión si $\frac{l}{d} > 25$

La fórmula de Hodgkinson se deriva de la general $P_o = Aw\frac{d^2}{l^2} = A\frac{d\,3{,}6}{l\,1{,}7}$ $\frac{\text{en centimetros}}{\text{en decimetros}}$ para $\frac{l}{d} \left\{ \begin{matrix} 25 \\ 120 \end{matrix} \right.$

El coeficiente A cambia si P es carga de fractura ó permanente, y según se dispongan los extremos de la pieza (Marvá, pags 778, 779 y 780). La fórmula de este experimentador determina la carga permanente que puede recibir una columna cuya fundición tiene un coeficiente $\bar{R}' = 81{,}33$ Kgs. Si llamamos P_1 esta carga permanente, y P_2 la que podría actuar sobre la misma columna construida de una fundición cuyo coeficiente $\bar{R}_2'$ sea distinto de 81,33, se podrá escribir

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{81{,}33}{\bar{R}_2'} \qquad \text{luego} \qquad P_2 = P_1\frac{\bar{R}_2'}{81{,}33}$$

De aquí resulta que si se consigna para R' un valor diferente de 81,33 por $c\bar{m}^2$ se determinará la nueva carga permanente multiplicando la de Hodgkinson por la relación de los dos coeficientes de fractura por aplastamiento.

Cuando la columna es hueca se calcula su carga permanente hallando la diferencia entre las cargas que

pueden resistir la columna exterior y la interior.

Love

Marvá nº 714

$\frac{l}{d}\Big\}\begin{matrix}5\\3\end{matrix}$ $P = \alpha \frac{R'\omega}{\alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{l}{d}\right)^2}$ = carga permanente

$R' = 12,50$ Kgs. p $^m/_{m^2}$.

$\frac{l}{d}\Big\}\begin{matrix}30\\120\end{matrix}$ $P = \alpha \frac{R'\omega}{\alpha_2 + \beta_2 \left(\frac{l}{d}\right)^2}$ = carga permanente

---

Gordon

Marvá nº 716.

Columnas macizas $P = \frac{R'\omega}{1 + H\alpha \left(\frac{l}{d}\right)^2}$ = carga permanente

$R' = 9,40$ Kgs p $^m/_{m^2}$.

Columnas huecas $P = \frac{R'\omega}{1 + H\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{l}{d}\right)^2}$ = carga permanente

El valor H se refiere al caso de disposición de los extremos; puede ser 1, 2 ó 4.

Sección cualquiera: $P = \frac{R'\omega}{1 + H\alpha \frac{\omega l^2}{I}}$ = carga permanente

Marvá nº 717

(Véase la tabla de Marvá, pág. 784 y 785 para columnas y piezas macizas)

La relación $\frac{l}{d}$ varía de cinco en cinco unidades entre $\begin{cases}5\\90\end{cases}$. La tabla determina el coeficiente de fractura, al de trabajo y la relación $\frac{R_1'}{R'} = m$ en función de la relación $\frac{l}{d}$. (véanse las tablas de Marvá, pág. 788 á 797, que expresan las cargas permanentes que pueden actuar sobre columnas macizas ó huecas de fundición y sobre columnas macizas de hierro dulce.).

Problemas { 1º Dadas ω y l hallar P.
2º Dadas P y l hallar ω.

Hierro y acero

Fórmula de Love. Esta formula tiene igual forma que la que vimos anteriormente para las piezas fundidas. Cambian únicamente en ellas los números α_1, β_1, α_2 y β_2 y el coeficiente de trabajo R' por centímetro cuadrado; este vale para el hierro 600 Kilogramos y para el acero 900 por cm^2.

Piezas de sección cualquiera. Se emplea la fórmula de Rankine (Marvá 730)

Carga permanente $P = \dfrac{R'\omega}{1+B\dfrac{\omega l^2}{I}}$ $R' = 6$ Kgs. por $^m/m^2$

B coeficiente numérico que vale en el caso de.. { Empotramiento en los extremos $= 0{,}00003$.
Articulación en los extremos $= 0{,}00006$

P será una carga expresada en Kgs:

Para el hierro $P = \dfrac{6\omega}{1+B\dfrac{\omega l^2}{I}}$

Para el acero $P = \dfrac{9\omega}{1+B\dfrac{\omega l^2}{I}}$

{ ω se expresa en milímetros.
$\dfrac{\omega l^2}{I}$ es independiente de la unidad de medida.

(Vease Marva pag. 810, tabla que da la carga permanente para columnas huecas de hierro dulce).

La determinación del momento de inercia mínimo I, es una operación laboriosa que hace poco práctica estas fórmulas. Pero según hemos visto anteriormente se puede reemplazar dicho momento I por una expresión de la forma $\frac{1}{n}\omega b^2$. Los valores de la fracción $\frac{1}{n}$ correspondientes á las secciones de T, I ⊔ + varían poco, y su término medio puede tomarse igual á

$\frac{1}{20} = 0,05 = \frac{1}{n}$.

Escribiremos, pues, $I = 0,05\,\omega b^2$, y sustituyendo en la fórmula tendremos

$$P = \frac{R'\omega}{1 + B\left(\frac{l}{b}\right)^2}$$

Considerando ahora como variable independiente la relación $\frac{l}{b}$, dandole valores comprendidos entre 12 y 40, deduciríamos las relaciones correspondientes $\frac{R'}{\frac{P}{\omega}} = \frac{R'}{R_1}$ que nos servirán para determinar R_1 que es la incógnita del problema.

⊔ T I +		⊔ T I +	
$\frac{l}{b}$	$\frac{R'}{R'_1}$	$\frac{l}{b}$	$\frac{R'}{R'_1}$
12	1,23	27	2,17
13	1,27	28	2,25
14	1,31	29	2,34
15	1,36	30	2,44
16	1,41	31	2,54
17	1,46	32	2,63
18	1,52	33	2,74
19	1,58	34	2,85
20	1,64	35	2,96
21	1,70	36	3,07
22	1,77	37	3,19
23	1,85	38	3,31
24	1,92	39	3,43
25	2,00	40	3,56
26	2,08		

Fórmulas que expresan las cargas que pueden recibir las piezas comprimidas, resistiendo al pandeo ó flexión lateral.

Se derivan estas fórmulas de la general teórica

$$P = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \times \frac{1}{m}.$$

en la que m puede valer 4, 6 ó 12, según los casos que se consideren y materiales empleados. Así tendremos:

Caso de dos articulaciones:

Hierro	$P = \frac{10 \times 16000}{4 \times l^2} I = 40000 \frac{I}{l^2}$	l se expresa en milímetros
Acero	$P = \frac{10 \times 20000}{4 \times l^2} I = 50000 \frac{I}{l^2}$	I id. id. id.
Fundición	$P = \frac{10 \times 10000}{6 \times l^2} I = 16000 \frac{I}{l^2}$	P se obtendrá en Kgs.
Abeto	$P = \frac{10 \times 1200}{12 \times l^2} I = 1000 \frac{I}{l^2}$	

VIGAS SOMETIDAS Á LA ACCIÓN DE CARGAS OBLICUAS Á SU EJE

Sea AB la directriz de una pieza prismática recta que forma un ángulo α con la horizontal. Las fuerzas exteriores que actúan sobre ella pueden tener direcciones arbitrarias en el plano de simetría de la viga.

La ecuación general de resistencia $R = \frac{N}{S} - \frac{Mv}{I}$ (Levy, Tomo 1°, n° 209) nos dará á conocer el valor de R correspondiente á las fuerzas elásticas que se desarrollan en una sección normal S á la pieza. El cálculo de una viga colocada en estas condiciones está reducido á determinar el valor de I y el de S que debe darse á su sección recta de manera que R no exceda del coeficiente de trabajo que se asigne al material empleado. Cuando hemos discutido la ecuación de resistencia (Levy, Tomo 1°, n° 209, 4° caso) vimos que el término $\frac{N}{S}$ era casi siempre bastante pequeño con relación al segundo $\frac{Mv}{I}$, por lo cual se suele despreciar el primero y admitir, como aproximación, que $R = -\frac{Mv}{I}$. Pero si la pieza prismática que hemos de calcular recibiera una gran compresión N, y el coeficiente de trabajo $\frac{N}{S}$ que esta compresión produce llegase á valer $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{3}$

ó $\frac{1}{2}$ del otro coeficiente de trabajo $\frac{Mv}{I}$ que origina la flexión, entonces no podríamos despreciar este término $\frac{N}{S}$ y sería preciso reconocer si resulta

$$\frac{N}{S} \geqq R'_1 = \frac{R'}{1+B\frac{Sl^2}{I}}$$

á fin de prevenir el pandeo de la pieza, sobre todo si su relación $\frac{l}{b}$ era mayor que 12.

La forma de las secciones rectas de estas piezas prismáticas, que trabajan simultáneamente por compresión y flexión, debe ser tal que no resulte una gran diferencia entre sus dos momentos principales de inercia. Conviene además procurar que su longitud libre no sea mucho mayor que 12 veces la menor dimensión transversal.

De lo expuesto resultan las tres ecuaciones de resistencia:

$$\begin{cases} R = \frac{N}{S} - \frac{Mv}{I} \\ R = -\frac{Mv}{I} \\ R = R'_1 - \frac{Mv}{I}. \end{cases}$$

que han de emplearse respectivamente, según los casos.

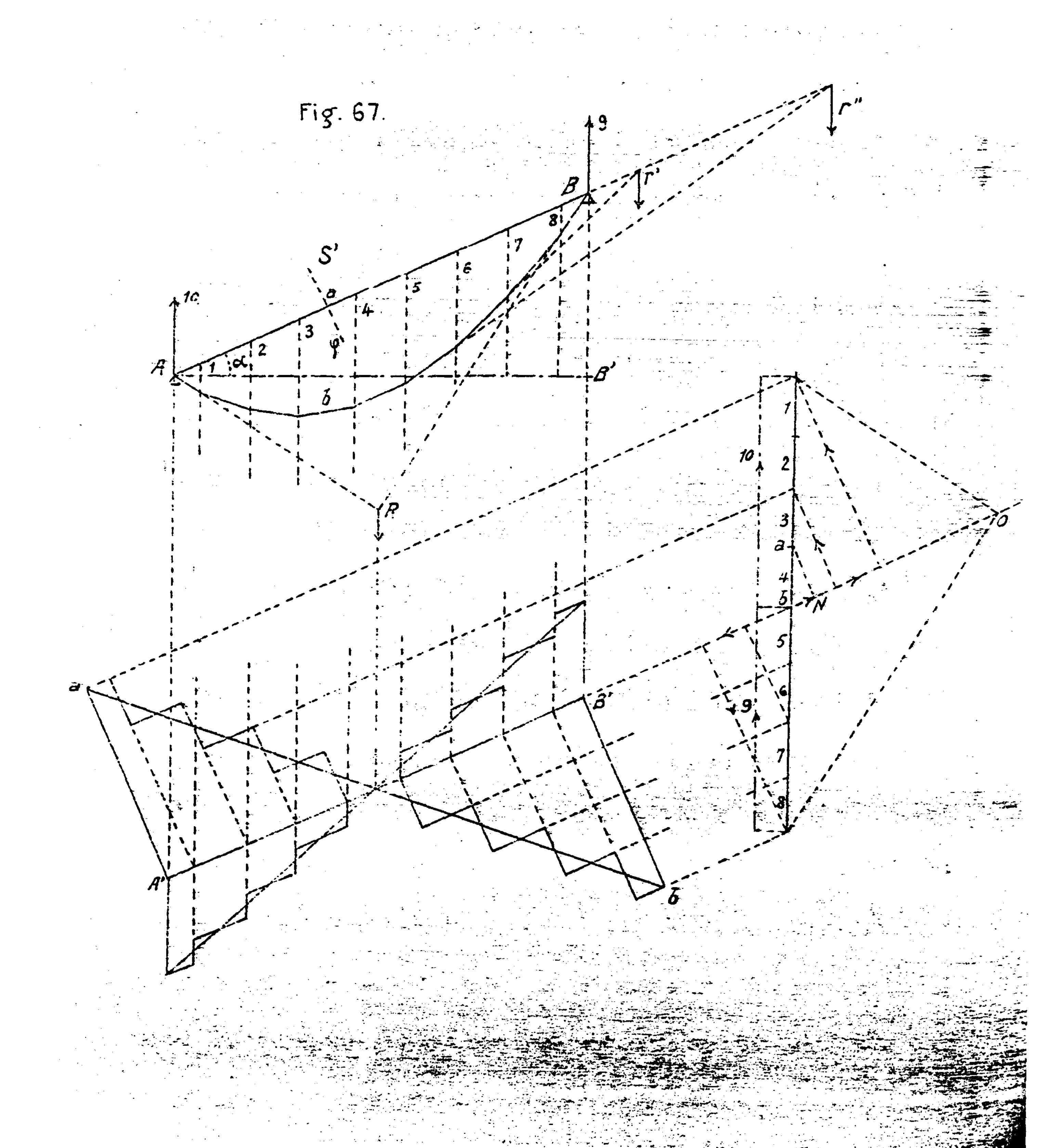
Carga vertical uniformemente repartida.

Supongamos que sobre la pieza AB actúa una carga

P uniformemente repartida. Las reacciones de los apoyos y la carga total P deben equilibrarse; luego estas tres fuerzas habrán de concurrir en un punto que estará en el infinito ó en el espacio finito.

Caso 1º Reacciones verticales. *Admitamos (Fig. 67) que*

Fig. 67.



los apoyos están dispuestos de manera que solo puedan desarrollar reacciones verticales. Éstas reacciones se conocerán construyendo un polígono funicular cualquiera de las fuerzas dadas, y sus ordenadas verticales multiplicadas por la distancia polar determinarán el momento flector en un punto de la viga. La recta de cierre de este polígono pudiera ser la misma viga AB.

Los valores de N y T se calcularán para cada sección S descomponiendo la resultante de las fuerzas exteriores comprendidas entre el extremo A y el punto a en sentido normal y tangencial á dicha sección. Ésta descomposición se hará en el polígono de fuerzas, trazando por los extremos a y b de dicha resultante a b una recta paralela y otra normal á la dirección S.

Él sentido de N y T se determinará atendiendo al sentido que tiene la resultante de que proceden y sus valores se representarán según indica la fig. 67.

Determinación analítica de los momentos de flexion.-

Sea p la carga por unidad de longitud que actúa sobre la viga; l la longitud de esta; y x la distancia de un punto cualquiera de la viga al origen A.

Admitamos que el eje de la Y sea normal á AB y llamemos α al ángulo de AB con la horizontal AB'.

Las reacciones de los apoyos serán $p\frac{l}{2}$, y el valor

de M se expresará por

$$M = p\frac{l}{2}x\cos\alpha - p\frac{x^2}{2}.\cos\alpha = \left(p\frac{lx}{2} - p\frac{x^2}{2}\right).\cos\alpha.$$

El máximo de M corresponde á $x = \frac{l}{2}$; luego

$$M_o = \frac{1}{8}pl^2\cos\alpha = \frac{1}{8}Pl\cos\alpha = \frac{1}{8}P \times AB'$$

Como AB' es la proyección horizontal de la viga AB, podemos decir que M_0 tiene el mismo valor que tendria en el caso de una viga horizontal de longitud igual á la proyección horizontal de la AB, y cargada de la misma manera que esta.

Caso 2º Reacciones oblicuas.- Si las reacciones de los apoyos son oblicuas (Fig. 68) deberán encontrarse

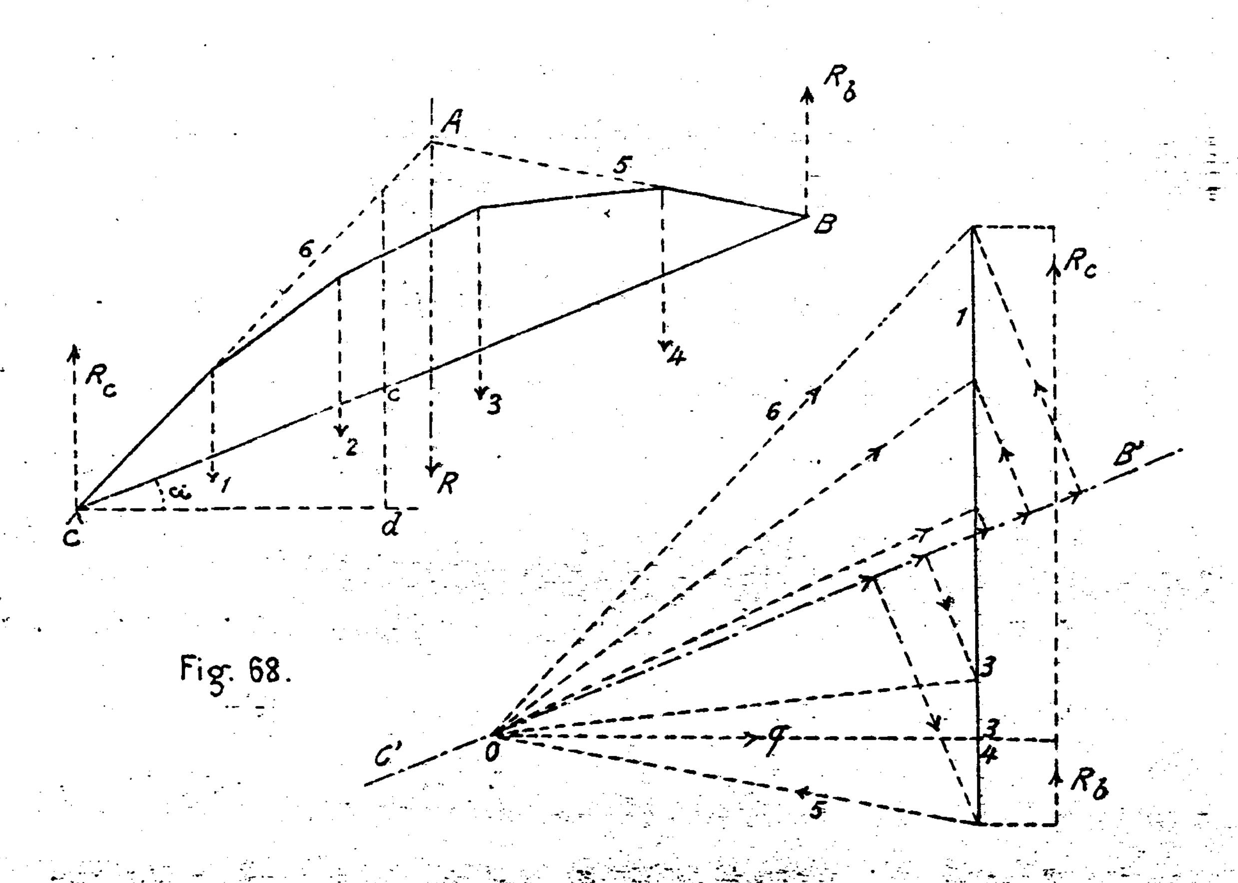


Fig. 68.

en un punto A_1 situado sobre la resultante R de las

cargas. Estas reacciones se determinan por medio de un polígono funicular. Supongamos que se nos dá la dirección de la reacción del apoyo B. Prolongada la linea de acción BA hasta que corte en A á la resultante, y uniendo este punto con el C se hallará la dirección de la otra reacción CA.

Trazando por cada extremo del polígono de fuerzas una recta paralela á CA y á BA, se conocerán las intensidades de estas reacciones, 5 y 6.

Los momentos de flexión se podrán conocer por el polígono funicular correspondiente á las cargas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, tomando como polo el punto de encuentro O de las dos fuerzas 5 y 6.

Los valores de N y T se determinan y representan gáficamente de igual modo que en el caso anterior.

Debemos notar que el valor de M se expresa, como sabemos, por el producto $q \times bc$, ya sean verticales ú oblicuas las reacciones de los apoyos, y ya sea la viga horizontal ó inclinada. Resulta, pues, que si las reacciones son muy oblicuas respecto á la viga, el término $\frac{N}{S}$ adquiere un gran valor, mientras que el $\frac{Mv}{I}$ tiene el mismo que si las reacciones fuesen verticales.

Flechas. La ordenada máxima de la elástica corresponde al punto medio de la viga, si la carga

se reparte simétricamente; luego

$$f = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M x \, dx}{EI}$$

Sustituyendo por M su valor en función de x resulta

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EI} \cos \alpha$$

PIEZAS CURVAS ARTICULADAS.

Sea AB (figura 69) la directriz de una pieza prismática curva, solicitada por las fuerzas 1, 2, 3, 4, y apoyada en A y en B por medio de articulaciones. Supongamos que R_1 R_2 son las reacciones de estos apoyos, y llamemos q_1 q_2 R'_1 R'_2 á sus componentes horizontal y vertical.

Sabemos que el sistema de fuerzas exteriores (cargas y reacciones) que actuan sobre la pieza AB, ha de equilibrarse, y por tanto, deben quedar satisfechas las tres ecuaciones

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma (Xy - Yx) = 0$$

cuando pongamos en lugar de X é Y sus valores correspondientes. Éstas tres ecuaciones de condición que

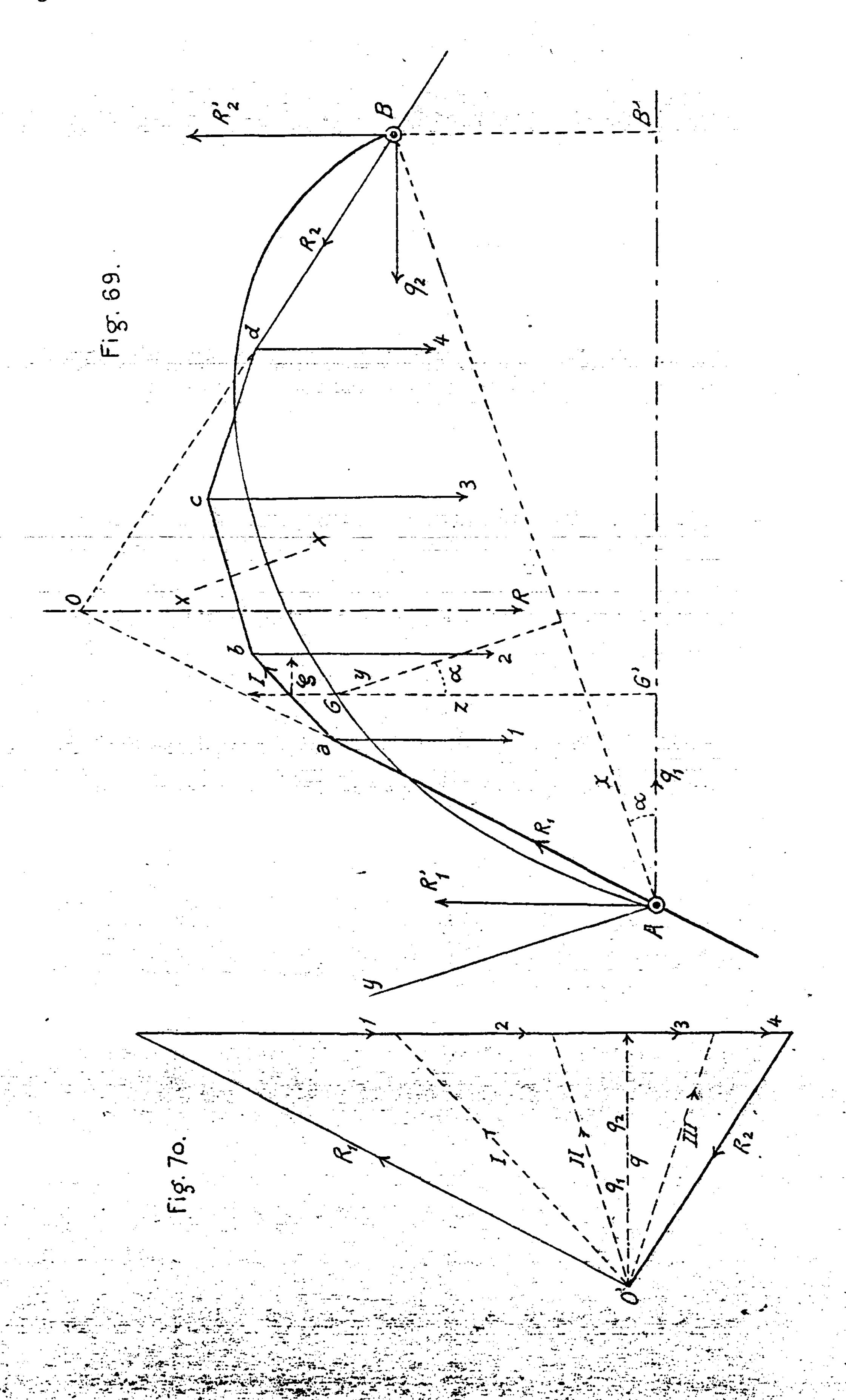


Fig. 69.

Fig. 70.

nos dá la estática no bastan para definir el valor de las cuatro componentes q_1 q_2 R_1' R_2' puesto que el número de estas excede al de ecuaciones. Resulta, por tanto, que las reacciones R_1 R_2 son indeterminadas, ó bien, que todas las rectas que pasen por A y B y se encuentren en un punto de la resultante R, podrán considerarse como líneas de acción de dichas fuerzas R_1 R_2, las cuales recibirán distintas intensidades según se halle más alto ó más bajo su punto de encuentro O, sobre la resultante de las cargas.

Admitamos que R_1 y R_2 hayan sido determinadas. Construyamos el polígono de fuerzas (Fig. 70) R_1, 1, 2, 3, 4, R_2, y tomando como polo el punto O, tracemos el polígono funicular A a b c d B. Vemos que un lado cualquiera c d de este polígono es la línea de acción de la resultante III del sistema de fuerzas R_1 1, 2, 3 que la preceden, y que la intensidad de esta resultante se determina por la longitud del radio polar correspondiente III. De aquí se sigue que la resultante de las fuerzas elásticas ó interiores que se desarrollan en una sección recta XX á la pieza, tiene por línea de acción uno de los lados de este polígono funicular, y que su intensidad se calcula por el radio polar que le corresponde.

El polígono funicular $A a b c d B$ es el único entre todos los demás què pasen por A y B que Determina las reacciones de los apoyos y las fuerzas elásticas de cada sección, y se acostumbra á llamarle polígono de presiones por ser de la misma especie que el que se emplea en las bóvedas para conocer las presiones que reciben sus diversas superficies de junta. Pero en el caso de las piezas curvas metálicas, las fuerzas elásticas determinadas por dicho polígono podrán ser de compresión ó de tensión, y por lo tanto se le podria llamar en general polígono de las fuerzas elásticas.

De lo dicho se deduce que para calcular una pieza curva apoyada en dos puntos articulados, basta conocer la distancia polar de un polígono funicular de las cargas que pase por dichos puntos. Vemos (Fig 70) que esta distancia polar q es la componente horizontal común de las dos reacciones R_1 ó R_2 y para conocerla es preciso recurrir á las ecuaciones de deformación de las cuales se deduce el teorema siguiente:

Teorema Fundamental. Si en los diversos elementos ds de un arco de sección cónstante ó variable, sometido á cargas cualesquiera (verti-

rales ó no) y descansando sobre las articulaciones fijas A y B de nivel ó no, se aplican fuerzas ficticias $\frac{M\,ds}{I}$ paralelas á la cuerda AB dirigidas en un sentido arbitrario convenido, ó en sentido contrario, según que M sea positivo ó negativo, su resultante coincide con esta cuerda.

Para demostrarlo tomemos la recta AB (Figura 69) por eje de las x, el punto A por origen y tracemos el eje de las y perpendicular á AB.

La componente u del desplazamiento elástico de un punto cualquiera de la fibra media que tiene x é y por coordenadas está determinada por la primera de las tres ecuaciones generales de deformación, ó sea

$$u = u_o + \omega_o (y - y_o) - \int_o^s \frac{M'(y-y')\,ds'}{EI} + \delta\tau \int_{x_o}^{x} dx' - \int_{x_o}^{x} \frac{N'ds'}{ES'}$$

Despreciando los dos últimos términos y teniendo presente que en el caso que nos ocupa $u_o = o$, $y_o = o$ resultará

$$u = \omega_o\, y - \int_o^{s_o} \frac{M'(y-y')\,ds'}{EI} = \omega_o\, y - y \int_o^{s_o} \frac{M'ds}{EI} + \int_o^{s_o} \frac{M'y'ds}{EI}$$

Eliminando ω_o entre esta ecuación y la tercera de deformación, que es

$$\Omega = \omega_o - \int_o^{s} \frac{M'ds'}{EI}$$

se deduce que

$$u = \Omega\, y + \int_o^{s_o} \frac{M y\, ds}{EI}$$

Si referimos esta ecuación al punto B, cuya ordenada y es cero, tendremos

$$o = \int_A^B \frac{M y ds}{I} \qquad (1)$$

puesto que siendo fijo el apoyo B es cero la componente u correspondiente. Esta ecuación nos dice que la suma de los momentos de las fuerzas ficticias $\frac{M ds}{I}$, colocadas en dirección paralela á la recta AB, con relación á esta recta, es nula, y en su consecuencia es nula, tambien el momento de su resultante; luego esta resultante coincide con la cuerda AB.

Si la pieza es de sección constante, el teorema se refiere á las fuerzas ficticias M ds, y la ecuación (1) será

$$\int_A^B M.y.ds = o \qquad (2)$$

Expresión del empuje.- Se llama empuje de un arco ó pieza curva á la componente horizontal de la acción que el arco ejerce sobre su apoyo.

La distancia polar q del polígono de presiones ó de fuerzas elásticas es el valor ó la intensidad de esta componente.

Sean (Fig. 69) 1, 2, 3, 4 las cargas verticales que obran sobre un arco AB colocado sobre dos articulaciones A y B situadas á diferente altura, y supongamos que AabcdB sea el polígono de presiones cuya distancia

polar q queremos calcular.

Observemos, primero, que el momento de flexión M en un punto cualquiera G es igual al producto obtenido multiplicando esta distancia polar por la longitud ζ de la ordenada vertical comprendida entre el polígono de presiones y la directriz del arco, contándose esta longitud ζ en sentido positivo ó negativo según que el polígono de presiones se halle por encima ó por debajo de la curva directriz AB. En efecto; el momento de la resultante I con relación á G será la suma de los momentos de sus componentes horizontal y vertical; pero el de esta es nulo por pasar por el punto G; luego el momento de dicha resultante será $q \times \zeta$. Podemos escribir, por tanto

$$M = q . \zeta \quad \text{ó} \quad M = q \left(z - \frac{y}{\cos \alpha} \right)$$

llamando z á la ordenada vertical del polígono de presiones contada desde la cuerda AB, é y la ordedel arco AB.

Si supusieramos ahora que las cargas 1, 2, 3, 4 actuasen sobre una viga AB' (proyección horizontal de la cuerda AB), apoyada simplemente en A y B', el momento de flexión μ de estas cargas para el punto G', proyección del G seria

$$\mu = q_o \, z_o$$

llamando q_o la distancia polar del polígono funicular que hubiesemos construido para conocer dicho momento μ, y z_o la ordenada de este polígono correspondiente al punto G'.

Pero se sabe (Estática gráfica, Levy, nº 43 bis) que

$$q_o z_o = qz = \mu$$

luego el valor de M se expresará por

$$M = q_o z_o - q \frac{y}{\cos \alpha}$$

y sustituido este valor en la ecuación (1) del teorema fundamental, tendremos:

$$0 = \int_A^B \frac{q_o z_o y . ds}{I} - \int_A^B \frac{q y^2 ds}{I . \cos \alpha};$$

de donde, despejando á q resulta la expresión del empuje

$$q = \frac{q_o \int_A^B \frac{z_o y . ds}{I}}{\int_A^B \frac{y^2 ds}{I}} \times \cos \alpha \qquad (3)$$

En el caso de estar los apoyos A y B a nivel $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$; luego

$$q = \frac{q_o \int_A^B \frac{z_o y . ds}{I}}{\int_A^B \frac{y^2 ds}{I}} = \frac{\int_A^B \frac{\mu y . ds}{I}}{\int_A^B \frac{y^2 ds}{I}} \qquad (4)$$

Cuando el arco es de sección constante se reducen estas expresiones, puesto que el factor constante I se elimina de ellas.

Caso de una pieza curva con tres articulaciones.- El polígono de presiones debe pasar por las tres articulaciones. Este será el polígono funicular de las cargas que actuan sobre el arco, trazado con la condición de pasar por los tres puntos dados, operación que se ejecuta según enseña la Estática gráfica.

MÉTODO GENERAL PARA LA DETERMINACIÓN GRÁFICA DEL EMPUJE Y DEL POLÍGONO DE LAS PRESIONES DE UN ARCO DE SECCIÓN CONSTANTE Ó VARIABLE.

Para aplicar gráficamente la fórmula (3), concibamos que se divide el arco en un cierto número de partes iguales de longitud común Δs, y reemplazamos aproximadamente las integrales por sumas, la ecuación (3) se convertirá, suprimiendo el factor Δs común á los dos miembros, en

$$q_0 \Sigma \frac{z_0}{I} y = q \Sigma \frac{y}{I} y \qquad (5)$$

El coeficiente de q_0 representa la suma de los momentos, relativamente á un punto de la cuerda AB, de fuerzas horizontales, todas del mismo sentido,

aplicadas á los puntos de división del arco y de magnitudes conocidas $\frac{z_0}{I}$.

Del mismo modo el coeficiente de q representa la suma de los momentos análogos de las fuerzas que tienen las mismas lineas de acción que las precedentes, todas del mismo sentido y de magnitudes conocidas $\frac{y}{I}$.

Estas dos sumas de momentos pueden facilmente representarse por dos longitudes. Para simplificar el dibujo suponemos lo que ocurre generalmente; que el arco considerado A C B (Fig. 71) sea de estructura simétrica con relación á la vertical CD de su vértice, pudiendo no ser simétricas las cargas.

Designando por z_0 y z_0' las ordenadas determinadas en el polígono funicular $\alpha_0\, \beta_0$ por dos verticales simétricamente colocadas con relación á CD, se tendrá

$$\Sigma_A^B \frac{z_0}{I}\, y = \Sigma_A^C \frac{z_0 + z_0'}{I}\, y.$$

no estendiéndose la segunda suma más que á una mitad del arco, por ejemplo á la mitad AC.

Del mismo modo

$$\Sigma_A^B \frac{y}{I}\, y = 2\, \Sigma_C^B \frac{y}{I}\, y,$$

no estendiéndose la segunda suma más que á la mitad del arco, es decir al CB.

Por consiguiente, la ecuación (5) se convierte, en el caso de un arco simétrico, en

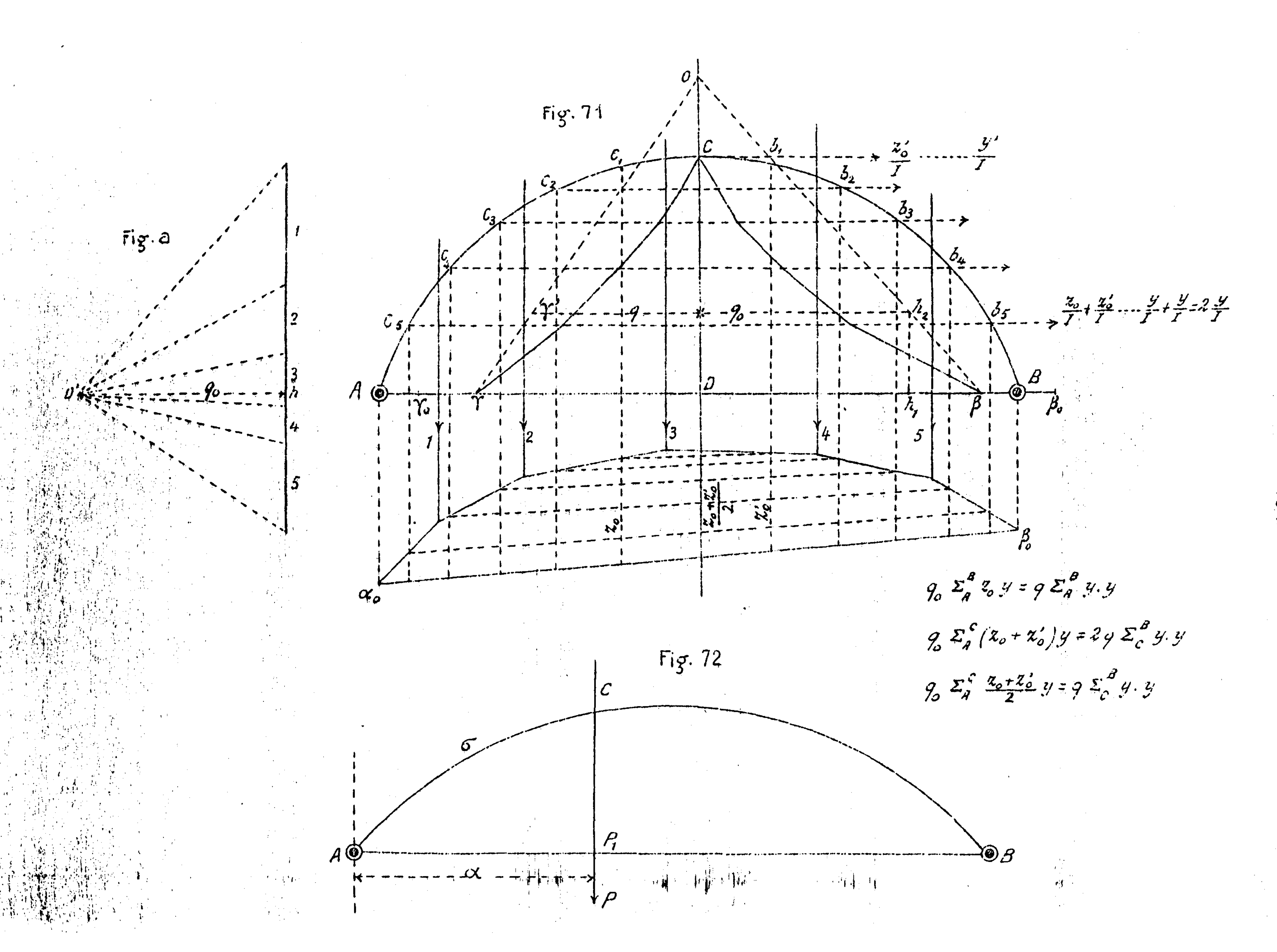


Fig. a

Fig. 71

Fig. 72

$$q_0 \sum_A^C \frac{z_0 + z'_0}{2I} y = q \sum_B^C \frac{y}{I} y \qquad (6)$$

Nota: El término que se refiere al vértice C en cada una de estas dos sumas, debe ser reducido á la mitad de su valor porque la fuerza única que obra sobre uno de los puntos de división C, reemplazará á las fuerzas contínuas que obran sobre cada uno de los semi-intervalos $C_i C_{i-1}$ y $C_i C_{i+1}$. En el punto C no hay más que uno de estos semi-intervalos puesto que no se considera mas que una mitad del arco.

Admitido esto supondremos que el número de partes en que se ha dividido el arco sea en general par, y que sobre la figura sea 12 este número, siendo $C\, C_1\, C_2\, C_3 \ldots b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ los puntos de división.

Para construir la suma $\sum \frac{z_0 + z'_0}{2I}$ imaginemos que en el punto C se aplica una fuerza $\frac{1}{2}\frac{z_0}{I}$, siendo z_0 la ordenada interceptada en el polígono $\alpha_0\, \beta_0$ por la vertical DC, y siendo I el valor del momento de inercia del arco en su vértice; análogamente se aplica en el punto C_1 una fuerza horizontal $\frac{z_0 + z'_0}{2I}$ designando z_0 y z'_0 las ordenadas interceptadas por las verticales simétricas c y b, y siendo I el valor del momento de inercia en cada uno de estos puntos. Del mismo modo se suponen tambien aplicadas en $C_2\, C_3\, C_4$ otras fuerzas análogas á las anteriores.

Ahora bien, supongamos:-

1º Que se forma el polígono de estas fuerzas llevando unas á continuación de otras, á una escala cualquiera, sobre la semi-horizontal DA á partir del punto D: sea $D\gamma_0$ la longitud del polígono así formado.

2º Que se construye el polígono funicular de estas fuerzas tomando un polo arbitrario O sobre la vertical DC, y este mismo punto O para punto de partida del polígono funicular, de suerte que su primer lado OC coincida con el primer radio polar OD: sea $OC\gamma$ este polígono cuyos vértices están sobre las líneas de acción de las fuerzas, ó sea sobre las horizontales $C-c_1b_1-c_2b_2 \ldots\ldots c_5b_5$; el punto γ es el punto de intersección del último lado con la cuerda.

Si $d = oD$ es la distancia polar tenemos que

$$\Sigma_A^C \frac{z_0 + z_0'}{2I} y = d \times \gamma D$$

Haciendo la misma operación con las fuerzas $\frac{y}{I}$, aplicadas según las mismas horizontales llevando una á continuación de la otra en la dirección DB, á la misma escala que las precedentes, tendremos el polígono de fuerzas $D\beta_0$. Construyendo después el polígono funicular $C\beta$ con el mismo polo O se tendrá

$$\Sigma_B^C \frac{y^2}{I} = d \times \beta D$$

Por consiguiente, la ecuación (6) se convierte suprimiendo el factor común d, en

$$q_o \times \gamma D = q \times \beta D,$$

que nos determina q por la construcción de una cuarta proporcional.

Para obtenerla unamos el punto O á los puntos β y γ; tomemos Dh igual á la distancia polar $q_o = oh$ (Fig. a). Tracemos la vertical $h_1 h_2$ (Fig. 71) hasta su encuentro en h_2 con $O\beta$; despues la horizontal $h_2 \gamma'$ hasta su encuentro con $O\gamma$. Se tendrá

$$q = D'\gamma'$$

siendo medida esta longitud en la escala de fuerzas adoptada sobre la figura a para las cargas dadas.

Nota. Se puede, si se quiere, evitar la construcción de esta cuarta proporcional observando que la distancia polar q_o del polígono $\alpha_o \beta_o$ es arbitraria. En efecto, empezaremos por determinar la longitud βD que solo depende de la estructura del arco y no de las cargas que este soporte; tomaremos esta longitud βD para la distancia polar q_o del polígono funicular $\alpha_o \beta_o$ de las cargas reales y obtendremos directamente $q = \gamma D$.

Si fuese más cómodo formar q_o igual á un múltiplo ó submúltiplo simple n de βD, de suerte que $q_o = n \times \beta D$, tendríamos de igual modo $q = n \times \gamma D$.

Empujes producidos por un peso que ocupa diversas posiciones sobre un arco.- *Si un peso único P recorre un arco de sección constante ó variable, se podria, por el método que precede, determinar el empuje y, por consiguiente el polígono de presiones, que produciria en cada una de sus posiciones. Pero como esta manera de proceder seria muy laboriosa si se aplicase á un gran número de posiciones, vamos á establecer un teorema que permite hallar el empuje correspondiente á cada una de las distintas posiciones de la carga, mediante la construcción de un polígono funicular, aparte del $C\beta$, trazado de una vez para siempre é independiente de las cargas.*

Teorema.- Si un movil único recorre un arco de sección constante ó variable, y en cada elemento dx de la cuerda del arco, considerada como una viga recta colocada sobre apoyos simples por sus extremidades, se aplica una fuerza ficticia igual ó proporcional á $\frac{y}{I}ds$, fuerza conocida que no depende más que de las dimensiones del arco, el momento de flexión que estas fuerzas ficticias determinan en un punto cualquiera P_1 de la viga (Fig. 72) representa (con un factor constante) el empuje que el peso determina en el arco cuando pasa por la vertical del

punto P_1.

En efecto, la expresión analítica del empuje de un arco de sección constante o variable es, según la fórmula,

$$q = \frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I}\, ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I}\, ds}$$

entendiéndose las integrales al arco entero supuesto de longitud s, designando μ el momento de flexión que produciría la carga, cualquiera que esta sea, actuando sobre la cuerda del arco considerada como una viga de apoyos simples.

Tomemos la extremidad izquierda del arco por origen de coordenadas y la cuerda por eje de las x. Sea α la abcisa de un peso único P que obra sobre el arco y σ la longitud AC de la porción del arco comprendida entre su extremidad izquierda y el punto de aplicación C de la carga P. El momento de flexión μ que esta carga produciría sobre la cuerda, considerada como una viga, es:

Para $x < \alpha$ .... $\mu = P\frac{l-\alpha}{l}x$

Para $x > \alpha$ .... $\mu = P\frac{\alpha}{l}(l-x)$

Por consiguiente

$$\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds = \int_0^\sigma \frac{\mu y}{I} ds + \int_\sigma^s \frac{\mu y}{I}\, ds = P\left(\frac{l-\alpha}{l}\int_0^\sigma \frac{xy}{I} ds + \frac{\alpha}{l}\int_\sigma^{s_1} \frac{l-x}{I} y\, ds\right)$$

que se puede escribir:

$$\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds = P\left[\alpha \int_0^s \frac{l-x}{l} \cdot \frac{y\,ds}{I} - \int_0^\sigma \left(\frac{l-x}{l}\alpha - \frac{l-\alpha}{l}x\right)\frac{y}{I} ds\right]$$

ó

$$\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds = P\left[\alpha \int_0^s \frac{l-x}{l} \cdot \frac{y\,ds}{I} - \int_0^\sigma (\alpha - x)\frac{y}{I} ds\right]$$

por lo tanto

$$q = \frac{P}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds}\left[\alpha \int_0^s \frac{l-x}{l} \cdot \frac{y\,ds}{I} - \int_0^\sigma (\alpha - x)\frac{y}{I} ds\right] \qquad (7)$$

Si ahora suponemos que sobre cada elemento dx de la viga que forma la cuerda, se aplica una fuerza ficticia de la forma $\frac{y\,ds}{I}$, la reacción producida por el apoyo izquierdo sería, la integral multiplicada por α en el primer término del paréntesis grande. Por consiguiente, este término es el momento de esta reacción relativamente al punto P_1 de la abcisa α. El segundo término del paréntesis es la suma de los momentos con relación á este mismo punto de las fuerzas ficticias que obran entre él y el apoyo izquierdo. Por lo tanto, el paréntesis grande es el momento de flexión producido en dicho punto P_1 de la viga por las cargas ficticias consideradas. Además el factor $\frac{1}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{I}}$ es constante ó independiente de la abcisa α, de suerte que la proposición enunciada queda demostrada.

Nota.- *Para utilizar gráficamente los resultados que preceden se dividirá el arco en un cierto número*

de partes iguales Δs, y se reemplazarán las fuerzas elementales $\frac{y}{I}ds$ por otras, en número finito $\frac{y}{I}\Delta s$, aplicadas á los puntos de división, ó por las $\frac{y}{I}$ proporcionales á las precedentes, puesto que el factor Δs es común á todas estas fuerzas. En estas condiciones, la expresión (7) del empuje se convierte, reemplazando las integrales por sumas, y suprimiendo el factor Δs, común al numerador y al denominador, en

$$q = P\frac{\alpha\sum_0^l \frac{l-x}{l}\frac{y}{I} - \sum_0^\alpha (\alpha - x)\frac{y}{I}}{\sum_0^s \frac{y^2}{I}} \qquad (8)$$

y si la viga es de sección constante

$$q = P\frac{\alpha\sum_0^l \frac{l-x}{l}y - \sum_0^\alpha (\alpha - x)\, y}{\sum_0^s y^2} \qquad (8)$$

ecuaciones en que los numeradores expresan los momentos de flexión de las fuerzas $\frac{y}{I}$ (ó de las fuerzas y, si el arco es de sección constante) relativamente al punto P_1 de aplicación de la carga movil P.

Según esto, construyamos un polígono funicular de distancia polar cualquiera, d, referente á las fuerzas verticales $\frac{y}{I}$ ó y si el arco es de sección constante: prolonguemos este polígono hasta las verticales de los apoyos y tracemos su recta de cierre. El producto ηd de su distancia polar por la orde-

nada η del polígono que coincide con la vertical del peso P, representa el numerador de la expresión de q: por consiguiente, el mismo polígono nos determina este numerador para todas las posiciones del peso P.

El denominador que es una constante, está del mismo modo, representado, de una vez para todas, por un producto $d \times h$ de dos líneas, de las cuales una puede ser igual á d; por lo cual $q = P \times \frac{d\,\eta}{d \times h} = P \frac{\eta}{h}$, y basta medir sobre el dibujo las dos longitudes η y h á una escala común cualquiera (por ejemplo, en milímetros ó fracciones de milímetros) y hallar el cociente $\frac{\eta}{h}$ de los dos números obtenidos. Este cociente, independiente de toda escala, representa el número abstracto por el cual es preciso multiplicar el peso P para tener el empuje que este peso produce cuando su línea de acción coincide con la vertical η.

ACCIÓN DE LA TEMPERATURA.

Hemos supuesto en lo que antecede que la temperatura del arco ha permanecido constante é igual á la que tenía en el momento de su colocación. Si esta

temperatura aumenta ó disminuye, el arco tiende á dilatarse ó á contraerse, y como se supone que los apoyos son fijos, se originan nuevas reacciones que vienen, según los casos, á añadirse á las debidas á las cargas ó á restarse de ellas.

Para hallar el empuje producido á la vez por las cargas y por las variaciones de temperatura, supongamos que la de colocación ó armado en obra de la pieza aumenta τ°C. Este número de grados será positivo ó negativo según que suba ó baje la temperatura.

Sea δ el coeficiente de dilatación del material de que se compone el arco. Si solamente una extremidad estuviese fija y la B pudiese resbalar sobre un apoyo horizontal bajo la influencia de un aumento (positivo ó negativo) de la temperatura, su cuerda, de longitud l, se alargaría una cantidad $\delta l \tau$.

Bajo la influencia de las cargas, tomaría otro desplazamiento, que llamamos u, de suerte que el desplazamiento total sería $u + \delta l \tau$. Pero estando fijo el punto B este desplazamiento es nulo; así

$$u + \delta l \tau = 0$$

Pero el desplazamiento puramente elástico, debido á la acción de las cargas, está dado por la fórmula

$$u = \int_0^s \frac{M}{EI} y \, ds$$

ó como el arco se supone homogéneo

$$u=\frac{1}{E}\int_0^s \frac{M}{I}\, y\, ds$$

luego
$$\int_0^s \frac{M}{I} y\, ds + E\delta l \tau = 0$$

Esta es la ecuación que reemplaza la (1) cuando se tiene en cuenta la variación de temperatura.

Como $M=\mu - q y$, tendremos que

$$\int_0^s \frac{\mu}{I} y\, ds - q\int_0^s \frac{y^2}{I} ds = -E\delta l\tau$$

de donde
$$q=\frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds} + \frac{E\delta l \tau}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds}$$

Principio de la superposición.- Determinación del empuje debido á la temperatura.- El primer término del segundo miembro es el que hemos estudiado hasta aquí: representa el empuje debido á las cargas hecha abstracción de toda variación de temperatura; llamemosle q_c:

$$q_c=\frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I}\, ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I}\, ds};$$

Si designamos por q_t al segundo, tendremos que

$$q_\tau = \frac{E\delta l \tau}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds}$$

representará el empuje debido á la variación de la temperatura; luego el empuje total será

$$q = q_c + q_\tau$$

Vemos que q se compone de la suma de los empujes debidos á las cargas y á la variación de temperatura, lo que confirma el principio de la superposición de los efectos originados por las fuerzas mecánicas y por la acción del calor. Reemplazando á

$$\int_0^s \frac{y^2}{I} ds \quad \text{por} \quad \Sigma_0^s \frac{y^2}{I} \Delta s$$

tendremos

$$q_\tau = \frac{E\delta l \tau}{\Delta s \, \Sigma \frac{y^2}{I}}$$

La suma del denominador sabemos calcularla gráficamente; la longitud Δs resultará de dividir la longitud s del arco en el número de partes iguales qiie hayamos tomado para calcular aquella suma; luego, haciendo operaciones conoceremos á q_τ.

Caso de una pieza curva que puede resbalar sobre sus apoyos.

Supongamos una pieza curva apoyada sobre sus extremos de manera que estos puedan moverse horizontalmente resbalando sobre una superficie plana.

Sea f el coeficiente de rozamiento que corresponde á la naturaleza del material de que estan formadas las superficies que rozan. Para que haya desplazamiento horizontal del apoyo, es preciso que la reacción R_1, (Fig. 73) forme con N un, ángulo mayor que el de rozamiento, y por tanto que sea

$q > R.F.$

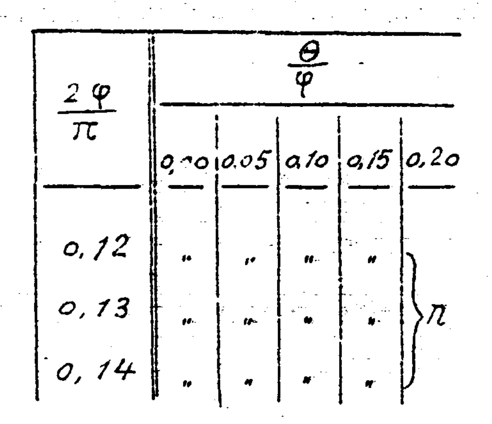
Fig. 73.

Se calculará q admitiendo primero que el apoyo permanece completamente fijo, según se ha hecho anteriormente, y si resultara mayor que RF, el punto α se moveria hácia afuera hasta tanto que la reacción R_1 forme con la vertical el ángulo de tang. $= f$, ó tome la dirección R_2. Entonces la nueva componente de esta nueva reacción seria $q' < q$, de donde resulta que, tanto menor será el empuje cuanto mayor sea la libertad que tenga el extremo de la pieza para desplazarse ó cuanto menor sea el coeficiente de rozamiento f.

Esto demuestra que el empuje de un arco solo puede obtenerse cuando se fija la invariavilidad de la cuerda que une los dos apoyos extremos, ó bien cuando se concede á esta cuerda un alargamiento determinado, diferente de cero.

Tablas de Bresse

Las tablas numéricas de Bresse que vamos á estudiar tienen por único objeto facilitar los cálculos que se refieren á los arcos circulares de sección constante, apoyados sobre articulaciones fijas.



$\frac{2\varphi}{\pi}$	$\frac{\theta}{\varphi}$				
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20
0,12	"	"	"	"	
0,13	"	"	"	"	n
0,14	"	"	"	"	

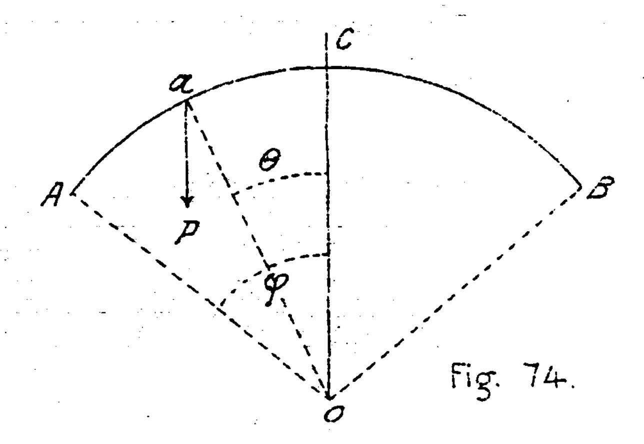


Fig. 74.

Sea AB (Fig. 74) un arco de círculo, y OC la vertical que pasa por su centro O.

Llamemos φ la mitad del ángulo que forman los radios OA y OB dirigidos á los apoyos: θ el ángulo que fija el punto a de aplicación de un peso P; q_o el empuje que produce este peso.

La tabla de que nos vamos á ocupar dá la relación $\frac{q_o}{P} = n$. Es de doble entrada, puesto que este valor de n depende de la amplitud 2φ y de la posición del punto de aplicación a, ó sea del ángulo θ. La pri-

mera casilla sirve para entrar en la tabla buscando la relación $\frac{2\varphi}{\pi}$. Las otras casillas expresan, sobre la horizontal que pasa por esta relación los valores de η para diversas posiciones α del peso P. La posición da el ángulo θ, y la relación $\frac{\theta}{\varphi}$ da el número que encabeza la casilla en que se ha de buscar el número η.

Las relaciones $\frac{2\varphi}{\pi}$ crecen de centésima en centésima desde 0,12 á 1,00.

Las relaciones $\frac{\theta}{\varphi}$ crecen de cinco en cinco centésimas desde 0,00 á 0,95. El primer valor 0,00 corresponde al caso en que el peso P se halle en el vértice del arco.

Si hubiera varios pesos se haría la suma de los empujes q_0 que cada uno produce, y tendríamos el empuje total q ó distancia polar del polígono de presiones. Trazado este, se conocerían M y N para cada punto del arco, y se trataría de satisfacer con estos dos valores á la ecuación de resistencia.

Los valores numéricos de esta tabla pueden calcularse por la fórmula de la pág. 196 suponiendo en ella que I es constante.

Pieza curva empotrada por sus dos extremos

Sea A B (Fig. 75) una pieza curva empotrada por sus dos extremos. En este caso no pasa el polígono de presiones por los puntos empotrados A y B. Las incógnitas que habrá que determinar para trazarle serán tres: primera, la ordenada z_1; segunda, la ordenada z_2; tercera, la distancia polar q de dicho polígono.

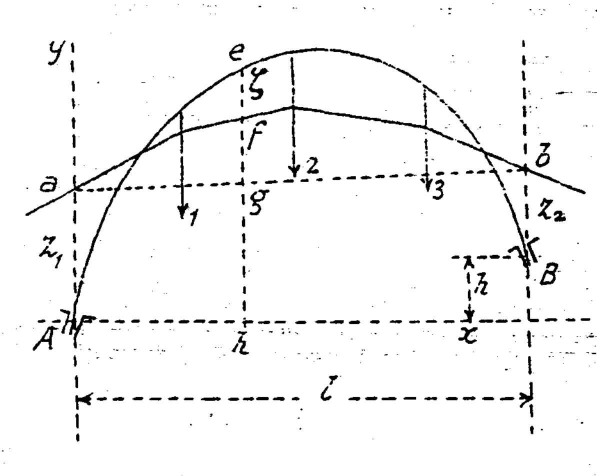


Fig. 75.

Se toman por ejes coordinados la horizontal y la vertical que pasan por el punto de apoyo A, y se escriben las tres ecuaciones de deformación de las piezas curvas:

$$u = \Omega y + \int_0^s \frac{Myds}{EI} \qquad v = -\Omega x - \int_0^s \frac{Mxds}{EI} \qquad \Omega = \omega_0 - \int_0^s \frac{Mdx}{EI}$$

Llevando las integrales desde A hasta B resulta:

$$(1) \qquad 0 = \int_0^s \frac{Myds}{EI} \qquad 0 = \int_0^s \frac{Mxds}{EI} \qquad 0 = \int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

Luego si en los diferentes elementos ds de un arco de sección y de elasticidad constantes o variables, sometido

á cargas cualesquiera y empotrado por sus extremos, se aplican fuerzas ficticias $\frac{Mds}{EI}$ paralelas á una dirección arbitraria, en un sentido convenido ó en sentido contrario, segun que M sea positivo ó negativo, estas fuerzas se equilibran cualquiera que sea la dirección que se les dé.

Busquemos ahora la expresión de M para un punto cualquiera del arco. Según hemos visto anteriormente,

$$M=q\zeta=q(eh-fg-gh)=q(y-y'-\frac{z_2-z_1}{l}x-z_1)$$

pero como $qy'=q_0 y_0=\mu$, si hacemos $\frac{z_2-z_1}{l}=B$ y llamamos A á la ordenada z, podremos escribir

$$1^{o} \ldots\ldots\ldots M=qy-\mu-qBx-qA.$$

Cuando los apoyos están á nivel, las cargas se distribuyen simétricamente y el arco es tambien simétrico, teniéndose

$$z_2=z_1$$

luego $B=0$, y por tanto

$$2^{o} \ldots\ldots\ldots M=qy-\mu-qA$$

Sirviéndonos de las tres ecuaciones (1) en el caso 1º, ó de dos solamente en el 2º, sustituiremos por M estos valores y tendremos

1º Tres ecuaciones con tres incognitas, q, A, B ⎫ que
2º Dos id con dos id q, A ⎭

resolviéndolas quedarán conocidas las cantidades z_2, z_1

y q, que definen el polígono de presiones.

Estas ecuaciones serán:

Caso 1º

$$\begin{cases} 0=q\int_0^s\frac{y^2ds}{EI}-\int_0^s\frac{\mu yds}{EI}-qB\int_0^s\frac{xyds}{EI}-qA\int_0^s\frac{yds}{EI} \\ 0=q\int_0^s\frac{xyds}{EI}-\int_0^s\frac{\mu xds}{EI}-qB\int_0^s\frac{x^2ds}{EI}-qA\int_0^s\frac{xds}{EI} \\ 0=q\int_0^s\frac{yds}{EI}-\int_0^s\frac{\mu ds}{EI}-qB\int_0^s\frac{xds}{EI}-qA\int_0^s\frac{ds}{EI} \end{cases}$$

Caso 2º

$$\begin{cases} 0=q\int_0^s\frac{y^2ds}{EI}-\int_0^s\frac{\mu yds}{EI}-qA\int_0^s\frac{yds}{EI} \\ 0=q\int_0^s\frac{yds}{EI}-\int_0^s\frac{\mu ds}{EI}-qA\int_0^s\frac{ds}{EI} \end{cases}$$

Sabemos construir gráficamente las integrales, y conocidas que sean tendremos

Caso 1º

$$\begin{cases} a.q-b-c.qB-d.qA=0 \\ c'.q-b'-a'.qB-d'.qA=0 \\ d.q-b''-d'.qB-e.qA=0 \end{cases}$$

Caso 2º

$$\begin{cases} a.q-b-d.qA=0 \\ d.q-b''-e.qA=0 \end{cases}$$

Los momentos M_a M_b de flexión, correspondientes á los apoyos, ó sean los momentos de empotramiento, serán:

$$M_a=q\,z_1 \qquad\qquad M_b=q\,(z_2-h),$$

Trazado el polígono de presiones quedará todo

Divisiones	y'	x	y^2	x^2	xy	μ	μy	μx	I	$\frac{1}{I}$	$\frac{\mu}{I}$	$\frac{\mu}{I}y$	$\frac{\mu}{I}x$	$\frac{y}{I}$	$\frac{x}{I}$	$\frac{y^2}{I}$	$\frac{x^2}{I}$	$\frac{xy}{I}$
1																		
2																		
3																		
4																		
"																		
"																		
"																		
"																		
"																		
"																		
								Suma........		e	b''	b	b'	d	d'	a	a'	c

conocido.

Si se quisiera calcular analíticamente el valor de los coeficientes a, b, c, d, ... se formaría el cuadro que anteriormente se indica.

Se suprimen en el sistema de ecuaciones los factores comunes E, ds, ó bien E, Δs, reemplazando las integrales por sumas.

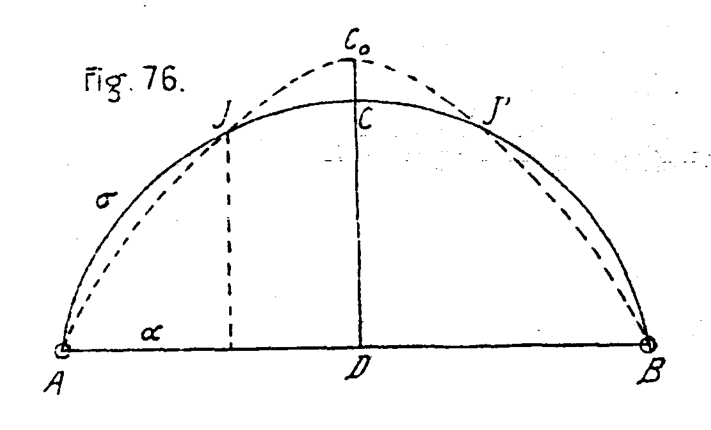
ARCOS APOYADOS SOBRE ARTICULACIONES.

Levy, Tomo 3º = Nota I.- Sobre la determinación directa de los arcos de igual resistencia.

Sólido de igual resistencia para una carga vertical simétrica.- El Inspector general de caminos Mr. Orgeries, ha sido el primero, según nuestras noticias, que ha propuesto un método directo y exacto para el estudio de las vigas de igual resistencia. Nosotros nos proponemos estender este método á los arcos.

Supongamos desde luego que el arco considerado es simétrico así como la carga que soporta. Cualquiera que sea esta carga y cualquiera que sea el arco, el polígono

de presiones pasará por las dos articulaciones A y B (fig. 76).



La distancia polar de este polígono se deduce según hemos visto, del teorema fundamental ó de la ecuación

$$\int_0^s \frac{My}{I} ds = 0$$

Cada elemento $\frac{Mds}{I}$ de esta integral es del mismo signo que el momento flector M. Por consiguiente, para que la integral pueda anularse (lo que exije que ciertos elementos sean positivos y otros negativos) es necesario que M cambie de signo, por lo menos una vez; y como todo es simétrico, debe cambiar M de signo en un punto del arco y en su punto simétrico; luego cambiará de signo dos veces por lo menos.

Esto equivale á decir que la curva de presiones, cualquiera que sea, debe cortar al arco no solamente en sus dos extremidades A y B, sino tambien en otros dos puntos J y J' simétricamente colocados con relación al vertice C.

Admitamos en primer lugar, (salvo demostración ulterior) que no le corta más que en estos cuatro puntos.

Esto sucederá forzosamente si la fibra media del

arco es una curva de segundo grado y si la carga es uniforme, porque entonces la curva de presiones es una parábola, la cual no puede cortar á otra curva de segundo grado en más de cuatro puntos.

Sea x la abcisa del punto J contada desde A, y σ la longitud del arco AJ.

En virtud de la simetría del arco y de la simetría de la carga, la ecuación (1) anterior puede reemplazarse por esta:

$$\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{M}{I} y \, ds = 0. \quad \text{ó bien} \quad \int_0^{\sigma} \frac{M}{I} y \, ds + \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{M}{I} y \, ds = 0$$

La condición de igual resistencia es $\frac{M v}{I} = \pm R$, siendo v la distancia de la fibra media á las fibras extremas (intradós ó extradós) ó que más se alejan de aquella. El signo del segundo miembro debe ser el mismo que el de M, y como M cambia de signo en J y no hay, por hipótesis, otro cambio de signo entre A y C, si se saca $\frac{M}{I}$ de la última ecuación y se sustituye en la anterior, esta se convierte en

$$\int_0^{\sigma} \frac{y}{v} \, ds = \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{v} \, ds \qquad (2)$$

En lugar de la distancia v de la fibra media á la más alejada, se puede introducir la altura total h del arco, que es, en general, proporcional á v; de

suerte que la ecuación se convierte en

$$\int_0^{\sigma} \frac{y}{h} ds = \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{h} ds \qquad (2')$$

Si la altura del arco es constante, el factor $\frac{1}{h}$ sale de los signos de integración y desaparece de la ecuación.

Esta ecuación determina el valor de σ, es decir, la posición del punto J por donde debe necesariamente pasar la curva funicular de las cargas, cualesquiera que estas sean. Debiendo pasar dicha curva por los tres puntos A B J, está determinada y se la puede trazar.

Su distancia polar, medida á la escala de fuerzas representará el empuje, y las porciones de ordenadas comprendidas entre dicha curva funicular y la fibra media, multiplicadas por esta distancia polar, darán los momentos de flexión. Conocidos estos, se deducirán los momentos de inercia por la condición de igual resistencia.

Vemos que el problema se reduce de este modo á resolver la ecuacion (2) ó (2'), que define la posición del punta J.

Aplicación á uña forma de Dion.

Esta forma cuya mitad se representa en la figura 77, está compuesta de un pié-derecho AC y de un par CB, unidos interiormente por uno ó varios arcos de circunferencia, dando al conjunto un aspecto de gran ligereza. Los apoyos se disponen sobre articulaciones, y el enlace de los dos pares en el caballete se supone ejecutado con suficiente rigidez para admitir la continuidad de la pieza prismática en el vértice B.

La fibra media, ó lugar de los puntos medios de las alturas, es la línea A CB marcada con trazos. Podemos, sin error de importancia, considerar la parte AC de esta fibra como una recta vertical de longitud H_0, y la parte correspondiente al par, como otra recta oblicua que forma un ángulo i con la horizontal, cuya tangente fuera $\frac{H_1 - H_0}{l}$.

Sea η la ordenada sobre AD del punto J desconocido en que la curva de presiones ha de cortar á la línea media.

Sc AC + CJ es la longitud que hemos llamado

Levy. III Partie.

(pag. 332 - § 4°)

Fig. 77.

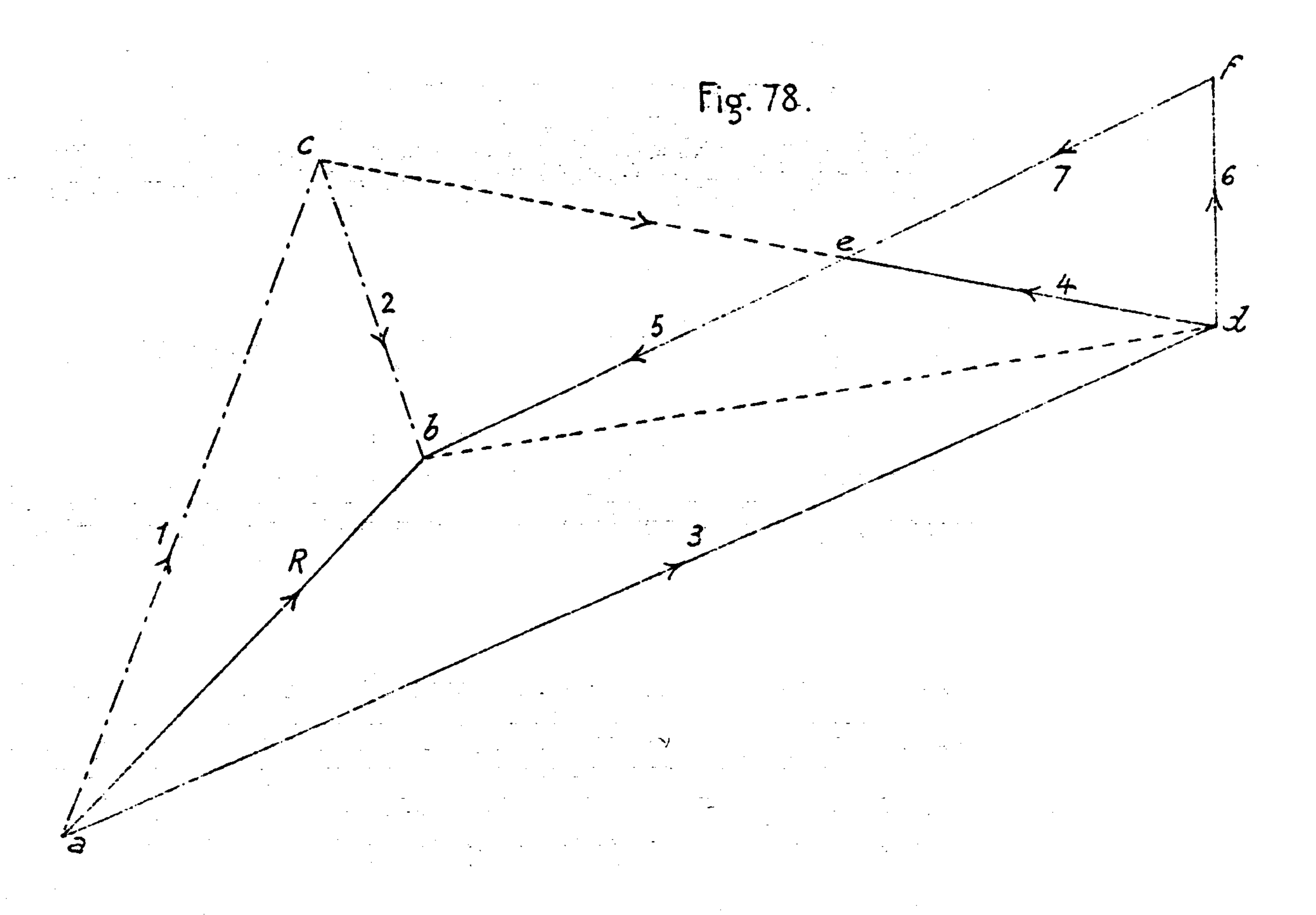


Fig. 78.

Fig. 77

$$\begin{cases} H_1 = 10{,}25 \qquad H_1^2 = 105{,}06 \\ H_0 = 6{,}15 \qquad H_0^2 = 37{,}82 \\ h_1 = 0{,}64 \\ h_0 = 0{,}60 \\ \text{tang. } i = \dfrac{10{,}25 - 6{,}15}{8{,}92} \qquad i = 24^\circ 40' \qquad \text{sen. } i = 0{,}417 \\ \eta = \sqrt{\left[105{,}06 + 37{,}82\left(1 - \dfrac{0{,}64}{0{,}60}\, 0{,}417\right)\right]\dfrac{1}{2}} = 7{,}94 \end{cases}$$

ó anteriormente, tendremos

$$\int_A^C \frac{y\,ds}{h} + \int_C^J \frac{y\,ds}{h} = \int_J^B \frac{y\,ds}{h}$$

Podemos despreciar el aumento de altura que tiene la sección de la forma en la unión del pie derecho con el par y suponer que la altura h es constante en toda la longitud de este é igual á la media. Análogamente, supongamos constante la anchura h del pie-derecho.

Llamemos h_1 la altura media de la sección normal al par, y h_0 la anchura constante del pie derecho. El valor de ds desde A hasta C es dy, y desde C hasta B es $\frac{dy}{sen\, i}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{1}{h_0}\int_0^{H_0} y\,dy + \frac{1}{h_1\, sen\, i}\int_{H_0}^{\eta} y\,dy - \frac{1}{h_1\, sen\, i}\int_{\eta}^{H} y\,dy = 0$$

ó $$\frac{H_0^2}{2h_0} + \frac{1}{h_1\, sen\, i}\left(\frac{\eta^2 - H_0^2}{2} - \frac{H^2 - \eta^2}{2}\right) = \frac{H_0^2}{2h_0}\ \frac{1}{2h\, sen\, i}\left(H_0^2 + H^2\right) + \frac{1}{h\, sen\, i}\,\eta^2 = 0$$

o bien $$\eta^2 = \frac{1}{2}\left(H_0^2 + H^2\right) - \frac{h\, sen\, i}{2h_0}\,H_0^2 = \frac{1}{2}\left[H^2 + H_0^2\left(1 - \frac{h_1\, sen\, i}{h_0}\right)\right]$$

de donde $$\eta = \sqrt{\frac{H^2 + H_0^2\left(1 - \frac{h_1}{h_0}\, sen\, i\right)}{2}}$$

Los datos que se refieren á la forma que se considera están consignados en la figura. Con estos datos se ha deducido el valor de la ordenada $\eta = 7,94$ mts., correspondiente al punto J de la parábola funicular y de ella nos servimos, como curva de presiones, para de-

terminar las dimensiones que conviene dar al par ó al pie derecho. Para trazar esta parábola basta notar que se conoce su eje vertical BD y los puntos B y J por donde debe pasar. Unamos los puntos A y J por una recta AJ que, prolongada, corta al eje de la curva en un punto K. Sobre AJ como diámetro construyamos una circunferencia á la cual trazaremos por el punto K una tangente KK'. Proyectemos el punto K' en K'' sobre AJ y el K'' sobre la vertical KD. El punto K_1 es el polo de la polar $K''K_1$ respecto á la parábola, y según la teoria de las polares, esta recta $K''K_1$, prolongada hácia la izquierda pasa por el punto de contacto de la tangente trazada á aquella curva por el polo K: luego el vértice S de la parábola será el punto medio de KK_1.

Trazando por el punto medio de DA una vertical hasta que encuentre á la horizontal que pasa por el vértice S, se obtiene un punto O de la tangente en A á la parábola, curva de presiones.

Ahora bien, si designamos por p la carga por metro lineal que recibe la proyección horizontal del par, el producto p l será la carga total que recibe una media forma. Tomando á partir de o una longitud o o' que represente á una escala convenida dicha carga p.l y trazando despues por o' una horizontal

hasta que encuentre en d á la reacción A O del apoyo, habremos hallado una magnitud o'd que será el valor del empuje q.

Llevando análogamente una longitud OL que sea igual á la semiluz AD de la forma, y trazando la horizontal $L d' = \delta$ se habrá formado un triángulo OLd' semejante al o o'd; luego

$$pl : q :: l : \delta. \qquad \text{de donde} \qquad q = p.\delta$$

Llamando P la carga total de la forma, puede también escribirse

$$q = \frac{\delta}{2l} . P = \frac{3.35}{2 \times 8,92} P = 0.187 P$$

Calculado de este modo el empuje, deduciremos el momento M para una sección normal cualquiera n n, multiplicando el empuje q por la ordenada $Gg = \zeta$, comprendida entre la linea media y la curva de presiones. La compresión N y el esfuerzo cortante T se hallará dirigiendo por el polo d del polígono de presiones, una paralela á la tangente á la parábola en el punto g. La longitud de esta tangente limitada por el punto d y la vertical o o' será la intensidad de la resultante del sistema exterior situado á la izquierda del punto G: luego esta resultante conocida se descompondrá en la dirección n n y en otra normal á n n. La primera componente es la T, la segunda

será la N.

El momento de inercia que debe darse á cada seccion de la pieza se determina de manera que su valor satisfaga á la ecuación de resistencia

$$R = \frac{N}{S} + \frac{MV}{I}$$

Los valores de v son positivos para los puntos del contorno exterior del par y del pie derecho. Si se calculan estos valores de I y se aumentan despues las alturas h que hemos consignado en los cálculos como constantes para la región en que se unen el par y el piederecho, daremos á la forma más seguridad.

Este procedimiento que hemos visto para determinar la curva de presiones es más breve que el procedimiento general descrito anteriormente, y el resultado que con él se obtiene difiere muy poco del que hubiesemos hallado calculando el valor de q por el método general. Es sin embargo preferible suponer una articulación en B y dibujar desde luego la parábola ó el polígono funicular de manera que pase por los puntos A y B con tangente horizontal en B. Vemos que el empuje en este caso será poco mayor que el o'd, calculado anteriormente, y que las ordenadas ξ serán tambien algo mayores en la nueva región negativa. Esta produciría momentos flectores

de mayor valor que los correspondientes á la primera parábola, y por tanto, algún aumento de R, pero se podria facilmente y con poco coste, reforzar el par por su linea exterior é interior si este aumento de R le hacia pasar de su límite superior.

Determinación directa de las compresiones ó tensiones que se desarrollan en las diferentes barras que componen la forma. Una vez trazada la curva de presiones puede calcularse el esfuerzo que recibe cada barra tratando la forma como sistema articulado. En este caso actuan las cargas solo en los nodos superiores y la parábola se sustituye por un polígono que la envuelve, cuyos lados son tangentes á dicha curva. Consideremos la sección m m que corta solo á las tres barras

3. 4. 5.

y supongamos que hemos trazado la tangente R á la parábola en el punto marcado sobre ella por la vertical V que pasa por el medio de la distancia horizontal e e comprendida entre los dos nodos a, b. Ésta tangente es la resultante del sistema exterior ac-

tuado á la izquierda de la sección m m, y su intensidad la conoceremos dirigiendo una paralela á dicha recta por el polo d. Llevemos (Fig. 78) la intensidad de esta fuerza sobre una recta a b paralela á la tangente y descompongámosla en las direcciones ac y cb, ó sean en la 1 y 2.

La componente 1 se descompondrá en la 3 y 4, que son

3 = ad „ 4 = dc

La componente 2 se descompondrá en la 4 y 5, que son

4 = ce „ 5 = eb;

queda por tanto para la barra 4 la resultante

dc - ce = de

luego barra 3 = a d .... compresión.

„ 4 = de ...... tensión.

„ 5 = eb .... tensión.

Si quisiéramos conocer ahora la fuerza que actúa sobre la barra vertical 6, cortaríamos las tres barras

3. 6. 7,

las cuales deben tener por resultante á la fuerza R, y de ellas se conoce ya la 3 = ad. Pero la fuerza db auxiliar es resultante de las desconocidas

6 y 7; luego

barra 6 = df.........compresión.

" 7 = Fb........tensión.

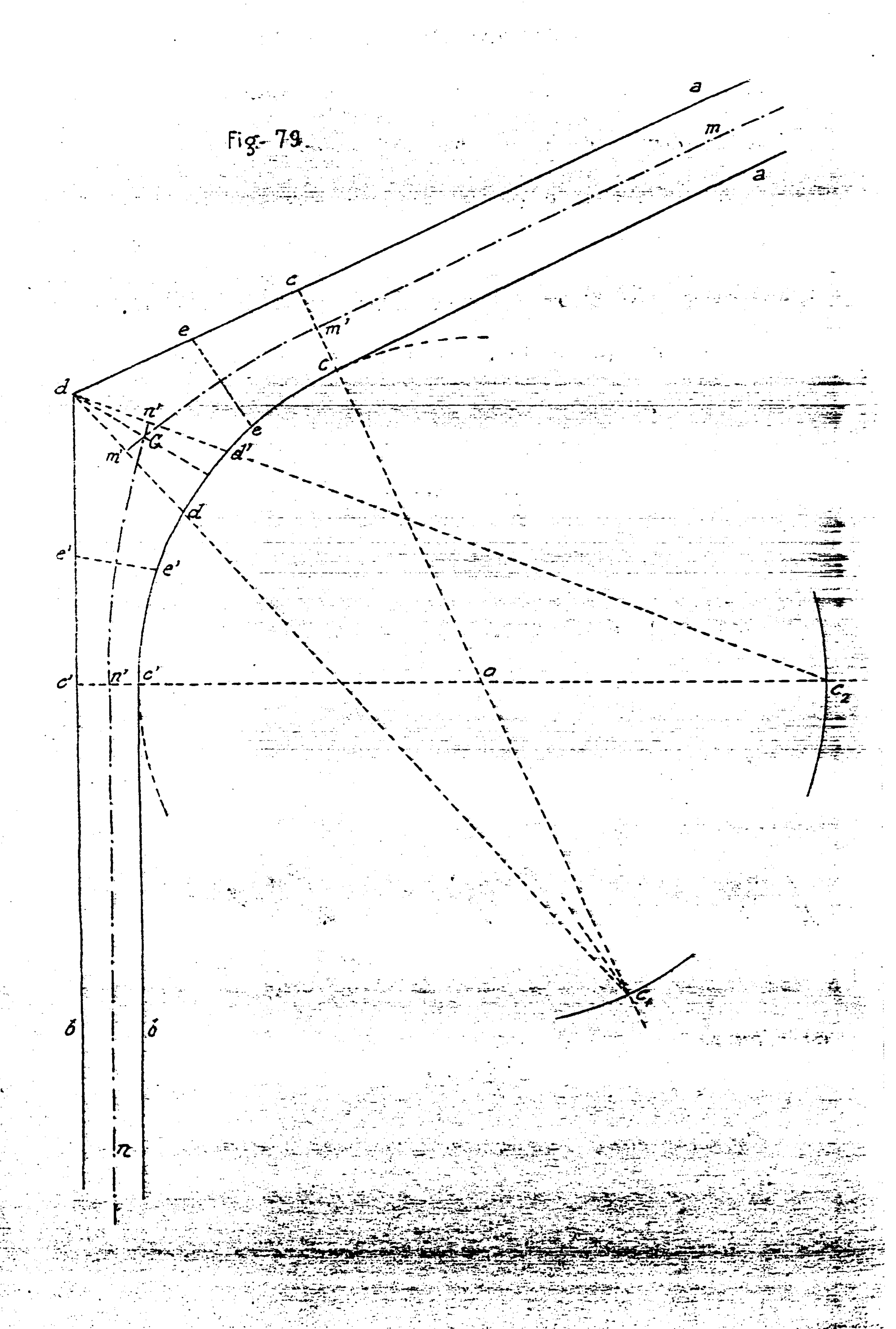
Como las líneas 5 y 3 son casi paralelas, vemos en la figura 78 que la tensión 4 = de y la compresión 6 = dF pueden obtenerse directamente con bastante aproximación proyectando la resultante R sobre las direcciones 4 y 6, de manera que las líneas proyectantes sean paralelas á la línea media del par y pasen por los extremos de la a b.

Análogamente veríamos que las barras 4 y 6 del piederecho reciben un esfuerzo que se determina proyectando la reacción del apoyo sobre sus direcciones, de modo que las proyectantes sean verticales.

Para el cálculo de las barras de contorno del piederecho, como son las 3 y 5, conviene emplear el método de Ritter. El momento en cada nodo valdrá el producto de la reacción del apoyo por la distancia de aquel punto á la dirección de esta reacción. El cociente de este momento por el ancho del piederecho dará la intensidad del esfuerzo que recibe cada barra de contorno.

Método para trazar la linea media de la forma en la unión del par con el piederecho.- Una vez dibujadas las lineas a-a que marcan el contorno del par (Fig 79) y las bb que limitan el piederecho, se trazan las lineas medias m m' y n n' de estos dos contornos y la circunferencia que une las lineas interiores a y b, cuyo centro o estará en la bisectriz del ángulo que forma la a con la b. Por este centro se dirigen normales á las lineas exteriores a y b, las cuales, prolongadas, determinan los puntos c_1 y c_2 por donde han de pasar las lineas isógonas. La primera de estas, correspondiente al par, se dirije por el punto de contacto c de la linea a con la circunferencia, y la última se traza uniendo d con c_1. Los puntos medios de cc y dd son los puntos extremos de la linea media de esta parte del par. Para hallar otro punto de ella se traza una recta cualquiera ee que pase por c_1, y marcando el medio de ee tendremos el punto que buscamos.

Cada una de las rectas que pasan por c_1 forman el mismo ángulo con a d y con la tangente á la circunferencia en e, y son, además normales al lugar geométrico m m', por lo tanto, no solo obtendre-


Fig. 79.
a
m
a
c
e
m'
c
d
n'
G
e
m'
d'
d
e'
e'
c'
n'
c'
o
c2
c1
b
b
n

mos con este procedimiento la línea media del par sino que también las normales á esta línea media.

Lo mismo diríamos respecto á las secciones cc', ee', dd' correspondientes al piederecho, las cuales pasan por el punto c_2. La línea media de este sería la nn'. El punto de encuentro C de las dos curvas mm' y nn' nos da la dirección dC de la barra correspondiente al vértice d, y nos define la altura que hemos llamado H_0.

Arcos empotrados en sus extremos.

Las fórmulas fundamentales son, en este caso, las siguientes:

$$\int_0^s \frac{M\,ds}{I} = 0 \qquad \int_0^s \frac{Mx\,ds}{I} = 0 \qquad \int_0^s \frac{My\,ds}{I} = 0 \quad (1)$$

á las cuales debe añadirse la condición de igual resistencia

$$\frac{Mh}{2I} = \pm R \qquad (2).$$

Considerémos un arco simétrico respecto á la vertical que pasa por la clave, cargado de manera que el peso que recibe se halle colocado simétrica-

mente con relación á dicha vertical.

Por razón de esta simetría, las ecuaciones 1ª y 3ª de la (1) pueden simplificarse extendiendo las integrales solamente desde el extremo de la izquierda del arco hasta la clave, pero la segunda queda como está, por cuanto el sumando $\frac{Mxds}{I}$, correspondiente á un punto del arco, no es igual al $\frac{Mxds}{I}$ del punto simétrico, puesto que el factor x correspondiente al primero es diferente del x del segundo.

Tendremos, pues,

$$\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{Mds}{I} = 0 \quad , \quad \int_0^{s} \frac{Mxds}{I} = 0 \quad , \quad \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{Myds}{I} = 0 \qquad (3)$$

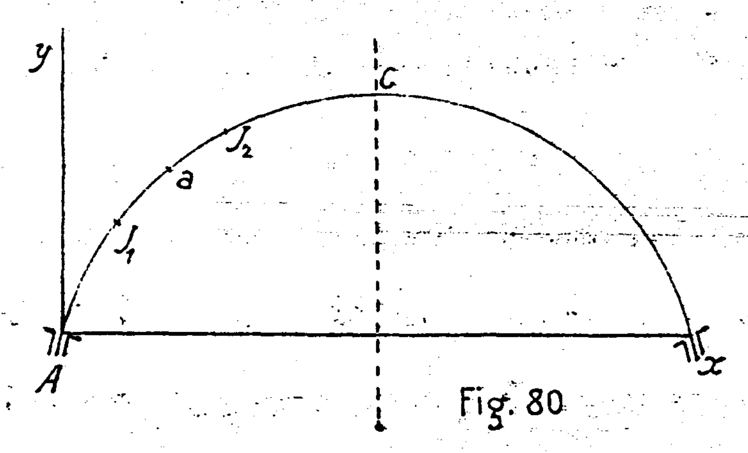


Fig. 80

Las ecuaciones 1ª y 3ª de estas tres nos dicen que la curva de presiones debe cortar á la linea media AC del arco (Fig. 80) en dos puntos J_1 y J_2. En efecto, supongamos que solo la cortara en uno, tal como el a. Llamando σ á la longitud Aa del arco, tenemos:

$$\int_0^{\sigma} \frac{Mds}{I} - \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{Mds}{I} = 0 \quad , \quad \int_0^{\sigma} \frac{Myds}{I} - \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{Myds}{I} = 0$$

ó bien $\qquad a - b = 0 \qquad ay_a - by_b = 0$

de donde se deduce que $a(y_a - y_b) = 0$, ó que $y_a = y_b$ resultado que no puede ser, y por tanto, el punto a supuesto no será unico.

Supongamos que sean dos, tales como J_1 y J_2; entonces resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\sigma_1} \frac{Mds}{I} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{Mds}{I} + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} \frac{Mds}{I} = 0 \\ \displaystyle\int_0^{\sigma_1} \frac{Myds}{I} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{Myds}{I} + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} \frac{Myds}{I} = 0 \end{array}\right\} (4)$$

ó bien como anteriormente hicimos,

$$a - b + c = 0 \qquad ay_a - by_b + cy_c = 0$$

lo que dice que el sistema ficticio a y c tiene por resultante la fuerza b, y por tanto, ha de haber dos puntos de corte sobre la curva AC.

Esta condición, expresada por las dos ecuaciones del sistema (4), juntamente con la (2) de igual resistencia, hace que tengamos las ecuaciones siguientes:

$$\int_0^{\sigma_1} \frac{ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{h} = 0 \qquad \int_0^{\sigma_1} y\frac{ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} y\frac{ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} y\frac{ds}{h} = 0$$

Aplicación á la gran forma de la nave de máquinas de la Exposición de Paris, año 1878.

Esta forma (Fig. 81) tenia 35,m60 de luz entre los ejes de los pilares; estos alcanzaban una altura de 16 metros, y la del caballete llegaba á 24,m60. El entre eje media 15 metros, y los pilares estaban empotrados en el suelo.

Las cargas y sobrecargas que M M. Molinos y Seyrig han admitido para los cálculos de resistencia de esta armadura, cálculos hechos según las fórmulas de M. Dión, eran, por metro cuadrado de cubierta, las siguientes:

Peso de la cubierta de pizarras metálicas y parecillos	27 Kgs.
Peso del hierro de las formas por metro cuadrado, despreciando el de los pilares, cristales y carreras	52 "
Sobrecarga accidental de nieve	40 "
Total	119 Kgs.

ó sea en número redondo 120 Kgs.

Y como la separación de las formas es de 15 me

tros, la carga por metro lineal de forma vale $p = 15 \times 120 = 1800$ Kilógramos.

Nosotros nos proponemos (suponiendo que no se conoce ninguna dimensión de las piezas del arco) hallar directamente los dos puntos J_1 y J_2 en que la parábola curva de presiones deberá cortar á la fibra media para que el arco sea de igual resistencia. De aqui se deducirá facilmente la curva de presiones, y por consiguiente todos los elementos necesarios para la determinación de la resistencia de las diversas partes de la armadura.

Sea H_a la altura sobre el suelo del punto a de la fibra media, y H la del punto C.

Sean η_1 y η_2 las ordenadas desconocidas de los puntos J_1 y J_2.

Podemos considerar la parte A a de la fibra media como si fuese sensiblemente una recta vertical, y la parte a C como una recta inclinada, formando un ángulo i con la horizontal.

Si además consideramos el pilar como si tuviese el mismo espesor h_0 por todas partes que por su pié, y el par como si tuviera una altura constante h_1, suprimiendo de este modo la resistencia debida á los aumentos de altura dados en los angulos,

nos colocamos en condiciones desfavorables.

Observando que de A á a es $ds = dy$, y de a á C $ds = \frac{dy}{\operatorname{sen} i}$, y admitiendo, salvo verificación, que el punto J_1 está entre A y a, y el punto J_2 entre a y C, tendremos las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{1}{h_0}\int_0^{\eta_1} dy - \frac{1}{h_0}\int_{\eta_1}^{H_0} dy - \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}\int_{H_0}^{\eta_2} dy + \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}\int_{\eta_2}^{H} dy = 0. \\ \frac{1}{h_0}\int_0^{\eta_1} y.dy - \frac{1}{h_0}\int_{\eta_1}^{H_0} y.dy - \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}\int_{H_0}^{\eta_2} y.dy + \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}\int_{\eta_2}^{H} y.dy = 0. \end{cases}$$

ó bien

$$\begin{cases} \frac{1}{h_0}(2\eta_1 - H_0) - \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}(2\eta_2 - H_0 - H) = 0 \\ \frac{1}{h_0}(2\eta_1^2 - H_0^2) - \frac{1}{h_1 \operatorname{sen} i}(2\eta_2^2 - H_0^2 - H^2) = 0 \end{cases}$$

Si se toma la altura media h del par y se la proyecta verticalmente, se encuentra que la longitud $h_1 \operatorname{sen} i$ así obtenida es sensiblemente igual á la h_0 del pilar. Podemos, pues, admitir aquí que $h_0 = h_1 \operatorname{sen} i$.

Por consiguiente, las ecuaciones anteriores se simplifican y se convierten en

$$2\eta_1 = 2\eta_2 - H \text{ ,, } \quad 2\eta_1^2 = 2\eta_2^2 - H^2 \text{ ,,}$$

ó bien

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{H}{2} \text{ ,, } \quad \eta_2^2 - \eta_1^2 = \frac{H^2}{2} \text{ ,,}$$

y por consiguiente $\eta_1 = \frac{H}{4}$,, $\eta_2 = \frac{3H}{4}$

Los puntos buscados J_1 y J_2 están, como se ha

supuesto, el uno entre A y a, y el otro entre a y B.

La curva de presiones, parábola que tiene su eje dirijido según la vertical del vértice de la forma, y sujeta á pasar por los puntos J_1 y J_2, está, pues determinada. Se puede trazar como se hizo anteriormente y está representada en la figura.

Si por el medio de $J_1 D$ se traza una vertical hasta su encuentro en O con la tangente al vértice, la línea $J_1 O$ es la tangente en J_1 á la parábola.

Si se toma una escala de fuerzas tal que $p \frac{l}{2}$. Kg. estén representados por $OD' = J_1 D$, la distancia $ED' = \delta$ será la distancia polar ó empuje q de la forma.

Por consiguiente, si δ se mide á la escala de longitudes, el empuje q se deducirá escribiendo $q = \frac{\delta}{l} P$, siendo P la carga total. El momento de flexión M en un punto cualquiera será $M = q \xi$, siendo ξ la ordenada comprendida entre la fibra media y la curva de presiones, medida á la escala de longitudes.

La relación $\frac{\delta}{l}$ vale en la forma de Dion 0'142.

Cálculo de formas semejantes.

(Véase Marvá, n.os 977 á 989)

Se dice que dos formas ABC y A'B'C' (Fig. 82) son semejantes cuando la relación $\frac{y}{x} = \eta$ de las coordenadas de los puntos m de la primera es igual á la relación $\frac{y'}{x'}$ de las coordenadas de los m' de la segunda. Supongamos que queremos proyectar una forma semejante á la del cuadro n.º 1, la cual ha sido ya calculada y construida.

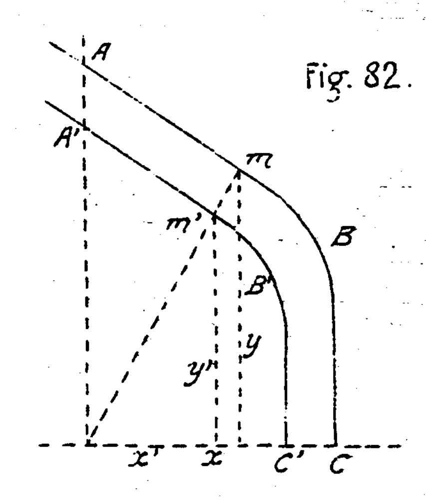


Fig. 82.

Tendremos una relación constante η entre las luces, alturas y coordenadas de los distintos puntos de las líneas medias, que llamaremos relación de semejanza.

Sea $m = \frac{P_1}{P_2}$ la relación de cargas - Vamos á ver como del cuadro n.º 1 deducimos otro para la forma n.º 2 que se proyecta.

Sabemos que en la forma calculada, n.º 1, el empuje q_1 vale

$$q_1 = \frac{\tilde{a}}{b} P_1 = r P_1 \quad \text{á} \quad \frac{q_1}{P_1} = r$$

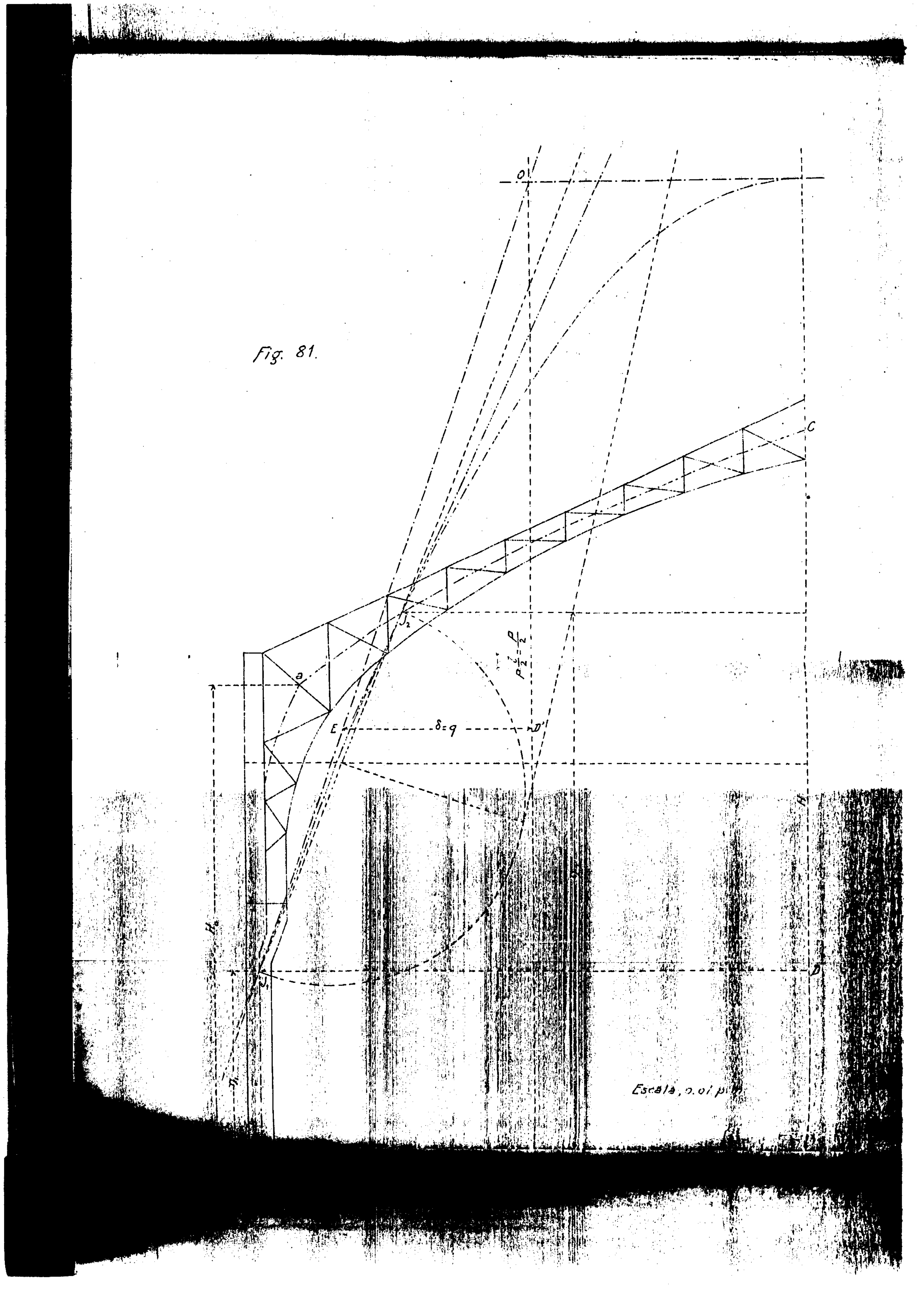


Fig. 81.
O
C
J_2
a
E
$\delta = q$
D'
$P\frac{l}{2} = \frac{P}{2}$
H
H_0
J_1
D

La relación r para la forma semejante núm. 2 es la misma que en la núm. 1; luego

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{P_1}{P_2} = m$$

El valor de N_1 para una sección cualquiera será una fracción de la carga total P_1, y como esta fracción es la misma para la forma nº 2, resulta que

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{P_1}{P_2} = m$$

Análogamente, los esfuerzos cortantes T_1 y T_2 se relacionan por

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1}{P_2} = m$$

De aquí se sigue que la relación de empujes, la de las compresiones N, y la de los esfuerzos cortantes T, es la misma que la de las cargas dadas P_1 y P_2; luego puede escribirse

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1}{P_2} = m.$$

La relación de momentos la obtendremos escribiendo que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{q_1 \zeta_1}{q_2 \zeta_2} = m.n \quad \text{ó} \quad M_2 = \frac{1}{m.n} M_1$$

Si los valores de $\frac{Mv}{I}$ han de ser iguales en las secciones correspondientes, tendremos:

$$\frac{M_1 u_1}{I_1} = \frac{M_2 u_2}{I_2}, \text{ de donde } \begin{cases} \dfrac{\frac{I_1}{v_1}}{\frac{I_2}{v_2}} = \dfrac{M_1}{M_2} = m.n \\[2ex] \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{M_1 u_1}{M_2 u_2} = m.n.n = m.n^2 \end{cases}$$

Estas dos expresiones nos dan las relaciones de $\frac{I_1}{I_2}$ y las de los módulos $\frac{I_1}{u_1}$ $\frac{I_2}{u_2}$ para el cálculo de las secciones correspondientes a la forma núm. 2.

BÓVEDAS

Levy.- Tomo IV.

Condiciones de estabilidad de una bóveda.- Sean ASC el intradós y BHD el trasdós de una bóveda cilíndrica cuya longitud la suponemos de un metro. En el sentido de la sección recta soporta además de su propio peso una sobrecarga formada por un macizo de fábrica ó de tierra limitado por un plano horizontal MM (Fig. 83)

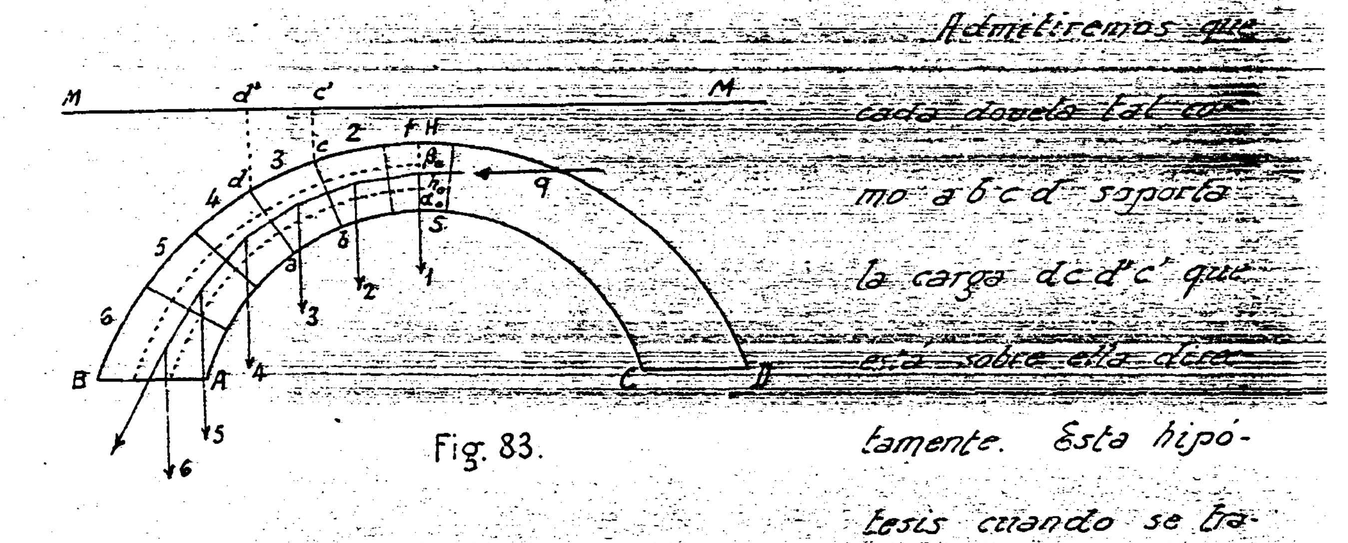


Fig. 83.

Admitiremos que cada dovela tal como abcd soporta la carga dcd'c' que está sobre ella directamente. Esta hipótesis cuando se trata de un terraplen no es exacta, pero parece desfavorable á la estabilidad de la bóveda puesto que equivale á despreciar el rozamiento que se produce á lo largo de las secciones verticales dd' y cc' el cual sería de tal naturaleza que reduciría algo el peso que recibe la dovela.

El estudio de la estabilidad de una bóveda es análogo al que hicimos cuando nos hemos ocupado [illegible]

de las piezas curvas prismáticas. En efecto, las reacciones de los apoyos son indeterminadas y no conocemos su dirección ni su intensidad. Tampoco se sabe cual sea el punto en que la línea de acción de estas fuerzas corta á los planos de arranque de la bóveda. Luego el trazado de la curva de presiones es indeterminado, de igual modo que lo fué para las piezas curvas empotradas en sus apoyos. Pero las soluciones de continuidad que presenta este nuevo género de piezas prismáticas de cantería, como carácter esencialmente distintivo de las metálicas ó continuas, impone ciertas condiciones al trazado de dicha curva de presiones. Éstas condiciones son las que llamaremos condiciones de estabilidad de una bóveda.

Prescindiremos de la cohesión producida entre las dovelas por el mortero que las une y estableceremos en principio que una bóveda será estable si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1ª Que ninguna junta tienda á abrirse, es decir, que las juntas estén comprimidas en toda su longitud.

2ª Que las dovelas no puedan resbalar sobre las superficies de junta.

3ª Que la presión por unidad de superficie desarrollada en un punto cualquiera de un plano

de junta, no exceda de un valor dado p_o dependien de la naturaleza de los materiales empleados en su construcción.

Teorema.- *Para que una bóveda sea estable, según se ha dicho, es necesario y suficiente:*

1º Que el centro de presión de cada junta, es decir, el punto O, (fig. 84) en que la encuentra la resultante R de las presiones que soporta, esté comprendido en el tercio medio de su longitud.

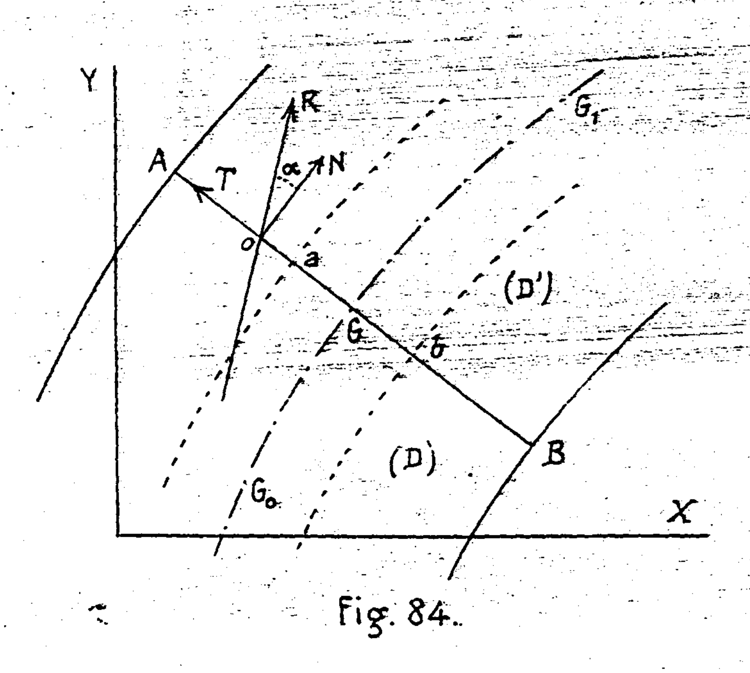


Fig. 84.

2º - Que la fuerza R forme con la normal á la junta un ángulo menor, ó á lo más igual al ángulo de rozamiento de la piedra empleada.

3º Que la componente normal N de la resultante R, multiplicada por el factor numérico $\left(1+\frac{6x}{e}\right)$ y dividida por la superficie de junta, sea menor ó á lo más igual á la presión por unidad superficial p_o correspondiente á la piedra que se haya de emplear.

Llamemos e á la longitud de la junta AB, y sea x la distancia del centro de presión al centro de gravedad

G de dicha junta.

En efecto:

1º La ecuación general de resistencia es

$$R = \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} = \frac{N}{S}\left(1 + \frac{xv}{r^2}\right) = \frac{N}{S}\left(1 + x\,\frac{12}{e^2}\,v\right)$$

$$ó \quad R = \frac{N}{e}\left(1 + \frac{6x}{e}\right)$$

de la cual deducimos según sabemos, que los valores obtenidos para el coeficiente R expresarán una compresión ó una tensión, si resultan positivos ó negativos. Si la junta AB ha de estar comprimida en toda su longitud, es preciso que R sea positivo para cualquier valor negativo que reciba el término $\frac{6x}{e}$.

Esta condición quedará satisfecha siempre que el valor absoluto de $6x$ sea menor que e, es decir, toda vez que

$$6x < e \quad ó \text{ bien} \quad x < \frac{e}{6}.$$

De esta desigualdad se deduce que el punto O debe estar comprendido en el tercio central de AB, ó sea en la region ab, para que toda la junta se halle comprimida.

2º Si no ha de haber resbalamiento de la dovela D sobre la D' por efecto de la componente T de R, es necesario y suficiente que el angulo α sea menor que el de rozamiento de piedra sobre piedra, es de-

cir, que tengamos $tang\ \alpha < f$.-

3º Sabemos que la ecuación de resistencia nos dá el máximo valor positivo de R ó sea p_o cuando hacemos $v = \frac{e}{2}$, luego

$$p_o = \frac{N}{e}\left(1 + \frac{6x}{e}\right) \qquad (1)$$

La condición de resistencia será por tanto

$$p_o \geq \frac{N}{e}\left(1 + \frac{6x}{e}\right)$$

Sobre las condiciones fundamentales de la estabilidad.- *De las tres condiciones de estabilidad indicadas, la segunda y la tercera son á la vez necesarias y suficientes.*

Respecto á la primera, vemos que teóricamente el centro de presión puede salir del tercio medio $a\,b$ sin que la bóveda perezca, siempre que la presión normal N adquiera un valor suficientemente pequeño para que multiplicada por $\left(1 + \frac{6x}{e}\right)$ no exceda á p_o.

Pero hallándose en este caso el eje neutro dentro de la sección, una parte de esta trabajará solamente; la hipótesis del plano es además algo incierta cuando esto sucede y en su consecuencia no tenemos la seguridad de cual sea la extensión de la junta que traba-

ja por compresión. Por esta razón parece lógico imponer la primera condición, desde el punto de vista práctico, á fin de obtener mayor garantía de estabilidad, más no por ser absolutamente necesaria esta condición.

Debe notarse que la (1) nos dá

para $x = o$ . . . . $p_o = \frac{N}{e}$

para $x = oa = ob = \frac{1}{6} e$ . . . . . $p'_o = 2 \frac{N}{e}$

En el primer caso la junta se halla igualmente comprimida en todos sus puntos. Este valor $\frac{N}{e}$ se llama presión media.

En el segundo caso, trabaja la sección desigualmente y el mayor valor p'_o de este trabajo molecular es doble de la presión media.

Imposibilidad de aplicar los principios ordinarios de la resistencia de materiales. -

Supongamos una bóveda ABCD, (Fig. 83) simétrica con relación á la clave y simétricamente cargada, de suerte que baste considerar la mitad ABHS.

Dividamos todas las juntas, así como la junta ficticia correspondiente á la vertical del vertice HS, en tres partes iguales. Formamos dos polígonos que tienen por vértices, el uno los puntos de división exteriores β . . . y el otro los puntos interiores α . . . ; tales

poligonos determinarán una faja central, dentro de la cual habrán de hallarse los centros de presión.

Habiendo trazado así el polígono de presiones correspondiente á los pesos de cada dovela, veriamos:

1º Si los puntos centros de presión están todos en los tercios medios de las juntas; 2º Si las presiones, que son los mismos lados de este polígono, forman con las normales á las juntas sobre las cuales obran un angulo menor que el de rozamiento; se admite que este ángulo puede llegar á valer 15 ó 20 grados. En fin, los radios polares darán las magnitudes de estas presiones, de ellas deduciremos el valor de sus componentes N normales á las juntas y la ecuacion (1) determinará la presión por unidad de superficie que soporta el material empleado: veriamos si esta presión excede ó no al límite práctico p_a correspondiente al material.

De lo dicho se sigue que la verificación de la estabilidad de una bóveda no ofreceria ninguna dificultad si se pudiese trazar el polígono de presiones. Pero este trazado exige que se conozcan el empuje q y un punto de paso para dicho polígono. Si la carga no fuese simétrica seria necesario conocer tres elementos, puesto que tres condiciones son, como sabemos, necesarias

para definir un polígono funicular, cuando no se sabe de antemano que es simétrico.

Los dos elementos q y $h_0 S$ (distancia que fija el dicho punto de paso), no podrian ser determinados más que teniendo en cuenta la elasticidad de la materia. Si se admitiese, por ejemplo, que una bóveda se deforma como un arco elástico que estuviese empotrado en sus extremos, se podrian aplicar los métodos anteriormente expuestos para las piezas curvas empotradas: semejante hipótesis no ofreceria ningun grado de certeza. En efecto: el modo de construcción de una bóveda; el modo de descender la clave, que se halla más ó menos apretada al tiempo de su colocación; la calidad de los morteros empleados y su grado de adherencia en el momento del descimbramiento; son otros tantos elementos perturbadores que escapan á todo análisis.

Tambien, entre los polígonos funiculares de las cargas dadas, que satisfacen á las condiciones de estabilidad precedentemente enunciadas, parece imposible definir, con alguna certeza, cual sea el que constituye el verdadero polígono de presiones; pues el asiento definitivo que toma una bóveda despues de descimbrada, puede influir tambien en el polígono definitivo

que haya de formarse. Todas las teorias que se han establecido para definir el problema, descansan en hipótesis más ó menos fundamentadas.

Pero si no es posible precisar todas las condiciones del problema, se pueden sin embargo indicar todas las que sean suficientes para asegurar la estabilidad en el terreno práctico de la construcción.

Principio del equilibrio límite.- Entre los modos de equilibrio, generalmente en número ilimitado, que estáticamente pueden admitirse en una bóveda, existe uno ó á lo más un número finito de ellos, que nosotros llamaremos estados de equilibrio límite, y los cuales se caracterizan por hallarse próximo el momento en que se altere una de las condiciones de estabilidad, ya porque algunas juntas están á punto de abrirse ó ya sea porque alguna dovela está á punto de resbalar. Si en este momento la estabilidad está asegurada, lo estará tambien en cualquier otro estado de equilibrio. En efecto: concibamos una bóveda colocada sobre la cimbra; el descimbrado se hace con las precauciones necesarias para que el asiento de la bóveda tenga lugar sin choque y sin movimiento repentino. Ahora, si la bóveda debiera caer sería preciso

que antes pasase por uno de los estados de equilibrio límite; pero según hemos supuesto, llega á este estado sin velocidad sensible, luego si en este estado su equilibrio está asegurado, no podrá ir más allá en virtud de la misma definición de equilibrio.

Asi pues basta comprobar las condiciones de estabilidad en uno ó en varios de los estados de equilibrio límite.

No pretendemos que el polígono de presiones que se produce en uno de estos estados sea el que se realizará efectivamente. Decimos tan solo, que este último, (el que se realizára) cualquiera que sea, no podrá menos de ser más favorable á la estabilidad que el primero ó los primeros; de estos bastará pues ocuparse únicamente.

Aplicación de este principio.- Nos apoyaremos en los siguientes hechos de la experiencia:

1º Figura 85.- Cuando una bóveda rebajada en arco de circulo, tiende á romperse bajo la influencia de las cargas permanentes que soporta, la junta de la clave se abre hacia el intrados mientras que las juntas de los arranques se abren hacia el trasdós y los estribos son arrojados hacia fuera. En el momen-

to en que este efecto está á punto de producirse el polígono de presiones pasa evidentemente por el tercio exterior de la junta de la clave y por el tercio interior de la junta de los arranques. Está pues perfectamente definido tal polígono.

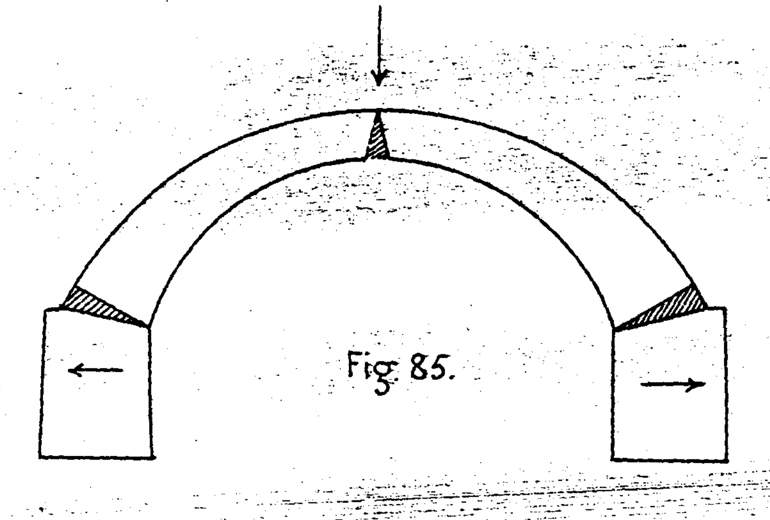


Fig. 85.

Llamamos tercio exterior de una junta al punto situado al tercio de la longitud de la misma á partir del trasdós; y tercio interior al punto situado al tercio á partir del intradós.

2º (Fig. 86) Cuando una bóveda de medio punto, ó rebajada, carpanel, arco de elipse y formas similares, está á punto de romperse, la junta de la clave se abre hacia el intradós; una de las juntas intermedias, entre la clave y los arranques, así como su simétrica, se abre hacia el trasdós y las juntas de los arranques se abren hacia el intradós. Estas juntas intermedias se llaman juntas de rotura.

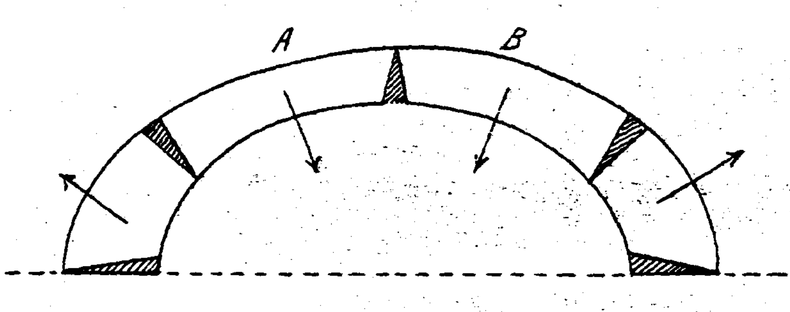


Fig. 86

La porción de bóveda comprendida entre las dos juntas de rotura desciende arrojando hacia afuera las partes extremas. Cuando este efecto está á punto de producirse el polígono de presiones pasa al tercio exterior de la clave y por el tercio interior de las juntas de rotura.

3º (Fig. 87). Una bóveda en ojiva, cuya carga se disponga de modo que sea mayor en la región superior que sobre los costados (caso general de las bóvedas de crucería), tiende á abrirse hacia el intrados en la clave y hacia el trasdós por alguna otra junta que se halla proximamente en la región inferior en que el despiezo comienza á ser normal al arco. La porción de este comprendida entre su arranque ó línea del diámetro y las últimas hiladas ó juntas horizontales de su despiezo, puede computarse como si formase parte del pilar ó estribo del arco; por tanto, el estudio de su estabilidad se limita tan solo á la porción de ar-

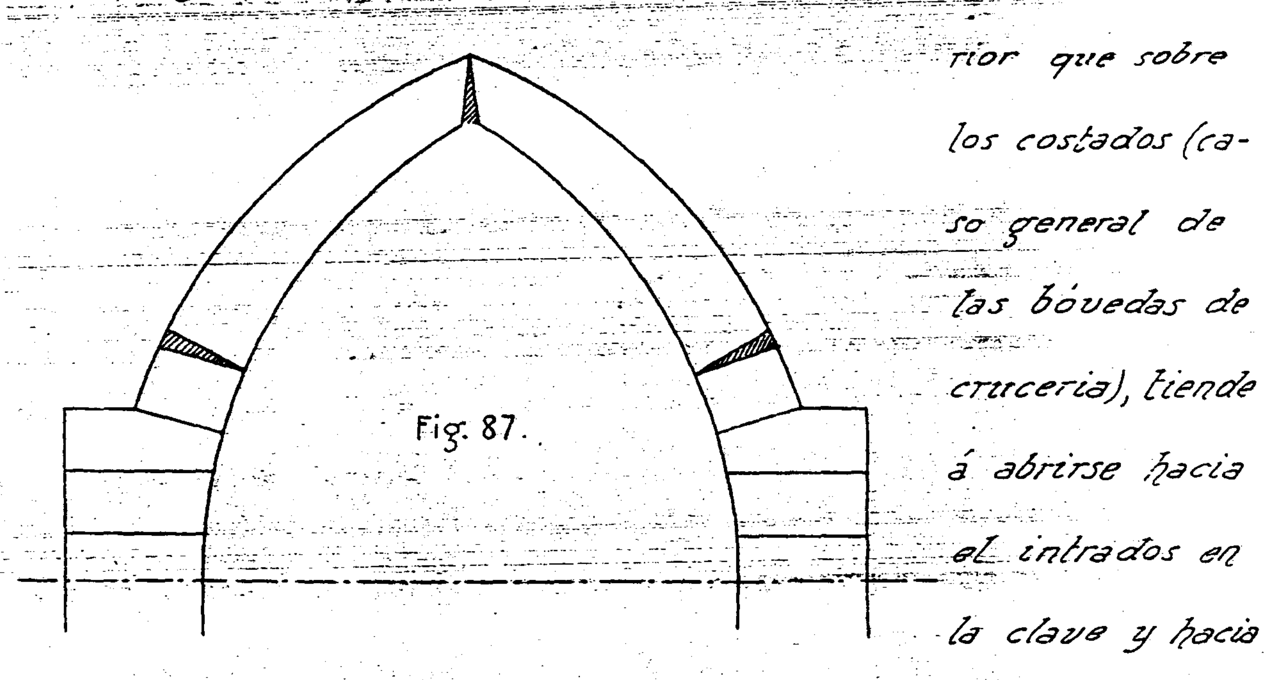


Fig. 87.

co comprendido entre la última hilada horizontal de su despiezo y la clave.

4º En lo que precede no nos hemos ocupado más que de la rotura manifestada por las aberturas de juntas. Las roturas por resbalamiento son poco frecuentes: no, pueden realizarse más que si al mismo tiempo hay abertura de ciertas juntas. Consideremos, por ejemplo, (Fig. 88) una bóveda excepcionalmente cargada hacia su vértice; únicamente en este caso se puede temer que la parte superior aa' bb' resbale á lo largo de dos juntas, tales como ab, a'b', y en tal caso, introduciendose entre estas juntas como una cuña, obligará á las partes inferiores á moverse hacia fuera, ya girando alrededor de las aristas exteriores de los arranques, ya, más dificilmente, resbalando sobre las juntas de arranque. Cuando el primer caso está á punto de producirse el polígono de presiones que pasa por los tercias exteriores de las juntas de arranque deberá encontrar otra junta, y su simétrica, bajo un ángulo dado, ó sea el ángulo de rozamiento.

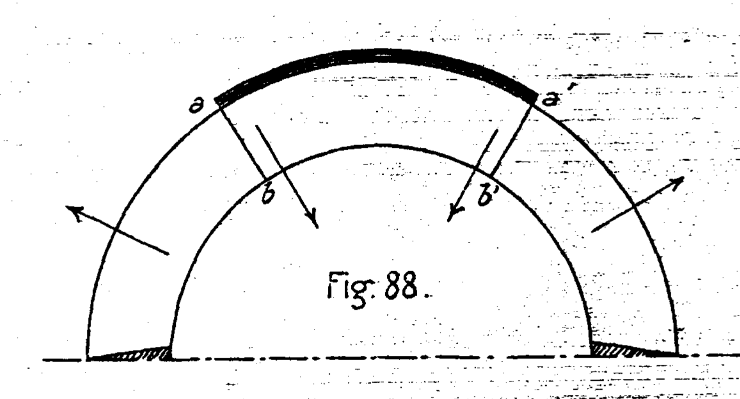


Fig: 88.

Estribos y pilares.- *Habiendo trazado el polígono de presiones más desfavorable en una bóveda se le prolongará en el interior del estribo. A este efecto bastará dividir el estribo en un cierto número de hiladas por planos horizontales, llevar los pesos de estas partes á continuación del polígono de fuerzas relativo á las cargas que obran sobre la bóveda y trazar los radios polares correspondientes.*

La prolongación de este polígono deberá estar comprendida en el tercio medio del estribo y satisfacer á las otras dos condiciones de estabilidad.

En el caso de un pilar, es decir, un soporte común á dos arcadas, procederemos como sigue: 1º Si las arcadas son iguales, no soportará más que una carga vertical igual al peso total de una arcada, siendo los empujes de las dos arcadas iguales y opuestos. Basta pues comprobar que la presión máxima por unidad de superficie no exceda al valor que conviene á los materiales empleados: 2º Si las arcadas son desiguales el pilar soporta una presión oblicua igual á la resultante de las presiones que las dos arcadas ejercen sobre él.- Se deberá sin embargo combinar la mayor presión de la bóveda

grande con la menor de la pequeña á fin de colocar al pilar en las condiciones más desfavorables. La resultante de estas dos presiones desfavorables se compondrá con el peso de las hiladas en las que hemos dividido el pilar y obtendremos de este modo el polígono de presiones correspondiente á este elemento.

Es necesario que este polígono esté colocado en el tercio medio del pilar y satisfaga á las condiciones generales de estabilidad.

Derogación de la regla del tercio medio. *Puede suceder que la regla que prescribe alojar rigurosamente la curva de presiones en el tercio medio de las bóvedas y estribos conduzca á dimensiones muy grandes.*

En este caso, como tambien si se quisiera establecer obras esbeltas y en las que por consiguiente se habrian de emplear morteros de muy buena calidad, nos contentaremos con alojar la curva de presiones en la mitad central de las juntas, en lugar del tercio medio, y se deberá entonces reconocer con cuidado que la presion máxima por unidad de superficie no excede en ninguna junta, al límite p_o.

Mr. Kleitz admite en principio las reglas siguientes para los puntos por los cuales debe pasar la curva de presiones que conviene emplear.

a). Bóvedas en arco de círculo.- En la clave debe pasar al tercio exterior de la junta; en los arranques al cuarto, si se trata de pequeñas luces, ó al quinto si se trata de grandes bóvedas, de la junta, á partir del intrados.

b) Bóvedas carpaneles.- Se las asimila á bóvedas de arco de círculo limitadas por las juntas inclinadas á 30°.

Empleo de las juntas ficticias verticales.- La determinación de las cargas de las diferentes dovelas es una operación algo laboriosa que debe preceder al trazado del polígono de presiones.

Si se trata de una dovela a b c d (Fig. 89) con su sobre-carga c d c' d', es necesario determinar: 1°- El centro de gravedad g del trapecio c d c' d'.

2°- El g_1 de la dovela a b c d.

3°- Componer los pesos de la dovela y de su sobre-carga aplicados á los centros de gravedad

Fig. 89

g y g_1.

Estas operaciones se pueden simplificar según vamos á ver: prolonguemos las verticales cc', dd' hasta el intrados en a', b' y consideremos, por ejemplo, el triangulo $bb'd$. La porción de bóveda proyectada según este triangulo debe estar en equilibrio bajo la acción: 1º de la presión ejercida sobre la junta db de la derecha hácia la izquierda; 2º de la presion ejercida sobre la junta ficticia vertical db' de la izquierda hácia la derecha, y 3º del peso del pequeño macizo dbb'; pero este peso es despreciable comparado con dichas presiones.

Luego podremos decir, que este macizo esta sensiblemente en equilibrio bajo la acción de las presiones que se ejercen sobre sus dos caras laterales, lo que exige que estas dos presiones sean iguales y opuestas y por consiguiente admitiremos que las presiones ejercidas de derecha á izquierda sobre la junta db y sobre la junta vertical db' son sensiblemente iguales y del mismo sentido, de suerte que prácticamente se puede reemplazar la primera junta real db por la segunda ficticia db' cuando hagamos el trazado de los poligonos de presiones.

Al tratar despues de rectificar que no hay ni resbalamiento ni presion excesiva por unidad de su-

perficie, se considerarán las juntas reales normales db.

Según esto dividiremos la semi-luz OA (Fig. 90) en n partes iguales; cada una de ellas tendrá una longitud $\frac{a}{n}$; las verticales de los puntos de división determinan las juntas ficticias tales como ab, $a'b'$ etc. Las verticales equidistantes de estas, tales como pq son las líneas de acción de las cargas que soportan las dovelas ficticias $aba'b'$.

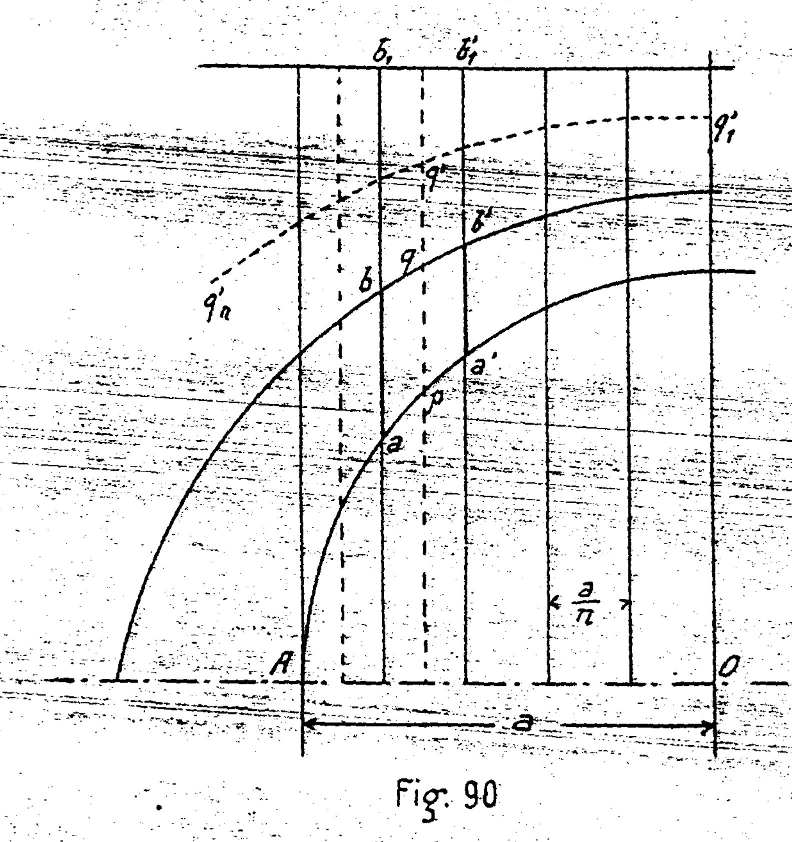


Fig. 90

Reduzcamos las porciones de ordenadas qq_1 comprendidas entre la superficie que limita el trasdós de la bóveda y la que limita el macizo de la sobre-carga, en la relación del peso específico de esta al de la piedra de que se construye la bóveda. Tendremos así una nueva línea de sobrecarga $q'_1 q' q'_n$.

Podemos admitir que según cada vertical pq' obra una fuerza igual al peso pqq', y que este peso es sensiblemente igual á

$$\Pi \times pq' \times \frac{a}{n}$$

siendo Π el peso específico de la piedra del arco. Este

peso es pues proporcional á la ordenada pq'.

Así basta aplicar según las verticales de los puntos p, medios de los intervalos de los primeros puntos de división, fuerzas representadas por las ordenadas correspondientes pq'. Estas ordenadas son las que habrá que llevar unas á continuación de otras para formar el polígono de fuerzas, ó bien estas ordenadas reducidas en una relación cualquiera.

Supongamos que se las reduce en la relación $\frac{1}{m}$. En lugar de la fuerza

$$F = \pi \times \frac{a}{n} \times pq'$$

se llevará sobre el polígono de fuerzas una longitud $\frac{pq'}{m}$; entonces á cada unidad de longitud medida sobre el polígono de fuerzas en la escala del dibujo corresponde una fuerza

$$\pi \times \frac{a}{n} \times m$$

La escala de fuerzas será de $\frac{\pi a m}{n}$ kg.s por el número de milímetros, ó centímetros, que represente el metro en la escala del dibujo.

Resúmen de las operaciones que deben hacerse para el estudio de una bóveda.- Supongamos una bóveda en cañón seguido, de 40 metros de luz y 10 de flecha, cuya mitad está representada en la figura 91.

1º Se trazará el intrados.

2º Se determinarán los espesores de la clave y de los arranques, y se trazará el extradós y los apoyos: supongamos que estos tienen 6 metros de altura; demos 3 metros de espesor á la clave y 7 á los arranques.

3º Se dividirá la semi-cuerda en un cierto número de partes iguales, (10 por ejemplo); las verticales de estos puntos de división, el punto medio C y el extremo a de la cuerda determinan las juntas ficticias. Se marcan los segmentos de estas verticales comprendidos entre el intrados y el extradós y se dividen dichos segmentos en 3 partes iguales: así se obtienen los puntos $(\alpha_1 \beta_1)$ $(\alpha_2 \beta_2)$ $(\alpha_3 \beta_3)$ ...... que se unen para obtener los polígonos $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ...... y $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ .... que limitan el tercio medio de la bóveda.

4º Se toman los puntos medios de las longitudes en que se dividió la semi-cuerda; las verticales de estos puntos medios son las líneas de acción de las cargas. Se marcan los segmentos de estas nuevas verticales comprendidos entre el intrados y la horizontal 10-1 que limita la sobre-carga.

Ahora bien si 2400 kgs por m³ es el peso específico de la sillería, y 1800 el del terraplen ó sobrecarga, es decir, los 3/4 de la sillería, se tomará los 3/4 de

qq á partir del extradós para marcar el punto q'.
Analogamente marcaremos los demás puntos del lugar $q'q'$, sirviendonos para ello del compás de proporciones.

De este modo habremos reemplazado la sobre-carga de la bóveda por otra equivalente formada por un macizo de silleria limitado por la linea $q'q'$.

Sean 1, 2, 3, 4, ... 10, las verticales de las cargas; y_1, y_2, y_3, ... y_{10}, las longitudes de las verticales comprendidas entre el intrados y la linea $q'q'$.

Estas longitudes y_i son proporcionales á los pesos de las dovelas ficticias limitadas por las juntas verticales.

Podremos escribir por tanto:

$$2400 \times \frac{20}{10} \times y_i = 4800\, y_i \text{ Kilogramos.}$$

5º Se forma el poligono de fuerzas correspondientes á estas cargas. Basta para ello llevar las ordenadas y_i reducidas de manera que no se alargue el poligono; en la figura se han reducido al $1/10$, de suerte que las longitudes 1, 2, 3, 4, ... 10 del poligono de las fuerzas son $\frac{y_1}{10}$, $\frac{y_2}{10}$ .... $\frac{y_{10}}{10}$, y por consiguiente una longitud de $0^m,01$ sobre el poligono de fuerzas representa 10×4800 ó sean 48000 Kgs. ó 48 toneladas. (*)

Un centimetro por 48 toneladas será la escala de

encuentre en σ_9 á la horizontal Ca. Se sube el punto σ_9 á S_9, sobre la horizontal β_0, y desde el punto S_9 se procura trazar una tangente á la linea de las α, de manera que su punto de contacto venga á estar entre las dos fuerzas $(y_{10} - y_9)$ que comprenden el lado $(10-9)_0$ prolongado anteriormente: en la figura 91 aparece el punto α_9 como punto de contacto. (Apliquese la plantilla para apreciarlo).

8.° Para continuar el trazado del polígono de presiones sin necesidad de recurrir al polo, se procede como sigue: prolónguese cada lado $(9-8)_0$, $(8-7)_0$, ... del funicular (Cp_0) hasta la horizontal Ca y subanse estos puntos σ_8 σ_7 ...... á la horizontal β_0, como se hizo anteriormente, y únase el punto S_8 con el punto 9, de la y_9 donde terminó el lado S_9 sobre esta fuerza y_9. Unase despues el punto S_7 con el 8 de la fuerza y_8; repitase lo mismo para el punto S_6 y el 7 de la y_7, continuando así hasta terminar.

Para hallar el polo del polígono de presiones que habriamos trazado de este modo, basta dirigir por el extremo b del polígono de fuerzas una paralela al último lado de aquel polígono.

9.° Despues de comprobar que el polígono de

fuerzas.

6º Se toma sobre la horizontal H un polo O cualquiera y se traza á partir de C el funicular $C p_0$ relativo á este polo.

7º Se prolonga el lado extremo p_0 hasta la horizontal Ca en el punto σ_{10}; la vertical de σ_{10} es la línea de acción de la carga total: se la prolonga hasta encontrar en S_{10} á la horizontal del tercio superior β_0 de la junta de la clave y se la unirá con el tercio interior de la junta α_{10} de los arranques. Si se tratase de un arco de círculo habría que construir un polígono de presiones que pasara por β_0 y α_{10}; su último lado sería $S_{10}\ \alpha_{10}$ y por consiguiente trazando por el extremo del polígono de fuerzas una paralela á esta línea hasta la horizontal H tendríamos el polo de este polígono. Tal polígono deberá estar contenido en el tercio medio de la bóveda, y si no lo estuviera, como ocurre en el caso del arco elíptico que estudiamos, se procede del modo siguiente para conseguir que sea tangente en algún punto al polígono de las α, límite inferior del tercio central de la bóveda:

Visto que el último lado $(\alpha - S)_{10}$ corta al polígono de las α, se prolonga el lado $(10-9)_0$ hasta que

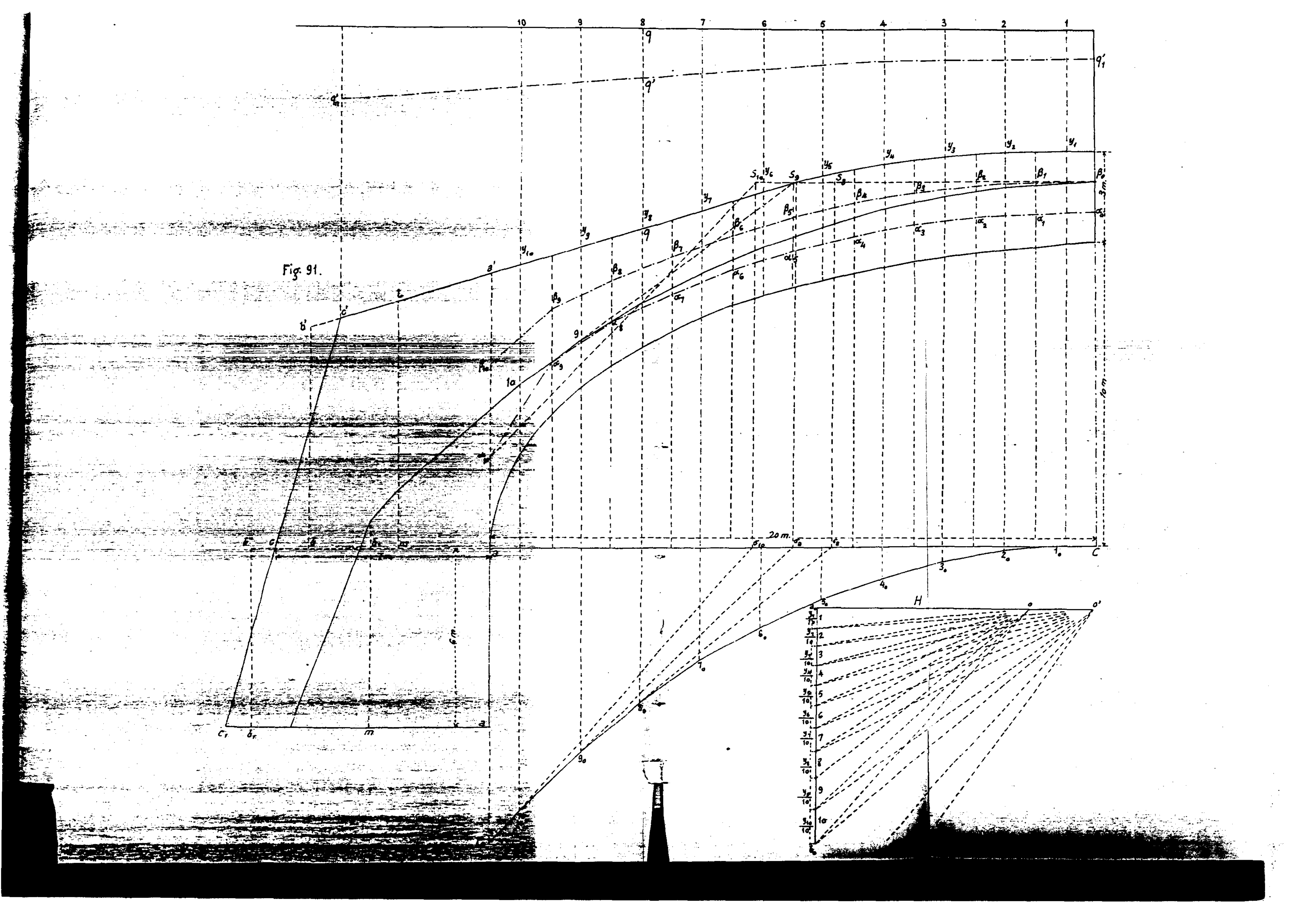


Fig. 91.

presiones está en el tercio medio de la bóveda, trazaremos por los puntos medios de las juntas verticales ficticias, juntas normales al intrados y veremos si los lados del polígono de presiones que les corresponden forman con las normales á estas juntas un ángulo menor que el de rozamiento.

10º Si se quiere conocer en cada junta la presión máxima, basta medir el radio polar r que determina la presión sobre esta junta, proyectar este radio sobre la normal á la junta y la longitud r_n que resulte, representa según la escala de fuerzas una de $R_n = 48000 . r_n$ Kgs. Se mide la longitud e de la junta y la distancia x del centro de presión de R_n al medio de la junta. Se debe tener

$$\frac{48000 \times r_n}{e}\left(1 + \frac{6x}{e}\right) \leq p_o$$

siendo p_o la mayor presión por centímetro cuadrado expresada en kilogramos: se verá si esta presión excede del límite admisible, teniendo en cuenta la resistencia de la piedra que se emplee.

11º- Trazado el polígono de presiones se puede prolongar hasta la base del apoyo, dividiendo este en un cierto número de hiladas horizontales. Supongamos que son dos separadas por la línea ab del arranque y reemplacemos los trapecios $aa'cc'$,

a c a_1 c_1 por el trapecio a a' b b' y por el rectángulo a b'' a_1 b_1.

El centro de gravedad del trapecio a a' b b' está aproximadamente sobre la línea media lm y su area es igual á lm.ab. Es preciso reducir dicha superficie á la base común de los trapecios antes considerados y cuyas líneas medias son las y_i.

Designando por 11 y 12 las dos nuevas fuerzas obtenidas para representar el peso del macho, trazaremos los radios polares correspondientes y prolongaremos el polígono funicular hasta la base del apoyo.

La presión sobre la base a_1 b_1 debe formar con la vertical un ángulo menor que el ángulo de rozamiento de la mampostería sobre la fundación. A ser posible debe hallarse en el tercio medio de a_1 c_1 ó bien cortar esta base en el quinto de su longitud á partir de un extremo; y la mayor presión vertical que resulte por unidad superficial no debe exceder de la que se quiere admitir según la resistencia del suelo.

Esta presión máxima se determina por la fórmula antes citada. Comprobaciones análogas pueden hacerse sobre cualquier otra junta inferior.

BOVEDAS DE REVOLUCION

Las boveda de revolución están engendradas por una linea recta ó curva plana, bien sea circunferencia ó elipse, que gira al rededor de un eje vertical fijo contenido en el plano de la generatriz.

Las juntas continuas se dibujan sobre el intrados por paralelos de la superficie de revolución y las discontinuas por arcos de meridianos; las juntas continuas corresponden á superficies cónicas de asiento cuyos vertices estan en el eje de revolución.

A la inversa de lo que sucede en las bovedas en cañón, no es necesario, para el equilibrio, que la boveda esté cerrada. Basta que una hilada ó anillo esté completamente asentado para que se pueda suspender la construcción sin comprometer en nada la estabilidad de la bóveda.

Consideremos Fig. 92 una porción de la boveda de revolución KLAD, comprendida entre el lecho de arranque LK y un lecho cualquiera de junta continua.

El anillo ABCD, correspondiente á la ultima hilada, forma un sistema material cuyo peso

está equilibrado por las componentes verticales de las reacciones ejercidadas sobre este anillo por las hiladas de apoyo inferior BC.

Llamemos <u>ω</u> el área de la sección ABCD, obtenida cortando el anillo por un plano meridiano; ρ la distancia del centro de gravedad G de esta sección al eje OZ de la bóveda; Π el peso de la unidad de volúmen de la silleria que compone el anillo. El volumen de este será $\omega \times 2\pi\rho$ y su peso por consiguiente será $\omega \times 2\pi\rho \times \Pi$.

Fig. 92.

Se admite que la reacción de la junta BC sobre el anillo ABCD se distribuye por la superficie cónica de esta junta, de manera que sea equivalente

á una fuerza F repartida uniformemente por unidad de longitud á lo largo de la circunferencia, de centro P, que pasa por el punto M, medio de la línea B C.

Llamemos ρ' el radio de esta circunferencia y $\underline{\alpha}$ el ángulo formado por aquella reacción F con el plano horizontal.

La suma de las componentes verticales de la fuerza F es pues igual á $F \times 2 \pi \rho' \times sen\, \alpha$ de suerte que una de las ecuaciones de equilibrio será

$$\omega \times 2 \pi \rho \times \Pi = 2 \pi \rho' F \times sen\, \alpha$$

de donde se deduce inmediatamente

$$F\, sen\, \alpha = \omega\, \Pi \frac{\rho}{\rho'}$$

Las componentes horizontales de las fuerzas F ejercen sobre el anillo una presión normal representada por $\underline{F \cos \alpha}$, por unidad de longitud tomada sobre la circunferencia $2 \pi \rho'$. Pero según un teorema conocido, la resultante de estas acciones normales ejercidas sobre una semicircunferencia, es normal al diametro que la cierra é igual á $F \cos \alpha \times 2 \rho'$; luego la segunda ecuación de equilibrio será

$$F \cos \alpha\, 2 \rho' - F \cos \alpha\, 2 \rho' = 0$$

Dividamos la bóveda en fragmentos iguales

mediante planos meridianos que formen entre si un ángulo $\hat{A}$ pequeño.

Dos planos consecutivos o'm y o'm', aislan la porción de bóveda comprendida entre el arranque Z K y la hilada inferior BC del anillo central, un fracmento de bóveda L K B C que puede asemejarse á un cañón de longitud variable. Este cañón está sometido á la acción de cuatro fuerzas que son:

1ª: un peso propio U aplicado á un centro de gravedad G: (Peso conocido)

2ª: la componente vertical V (conocida que procede del anillo superior comprendido entre los planos meridianos).

3ª: la componente horizontal N. (Que hemos de calcular).

4ª: la reacción R de la hilada de asiento. (Que tambien calcularemos).

Las dos fuerzas verticales U y V se componen en una sola T, suma de aquellas, y admitiendo que la reacción R de la superficie de asiento L K de la bóveda se distribuya sobre dicha superficie de manera que su resultante pase por el punto medio I, bastará descomponer la fuerza resultante T en dos

direcciones N y SI, para determinar así la intensidad de la fuerza N y R. Estas fuerzas N y R serian los lados extremos de un funicular referente á las componentes de U y de V que seria á la vez un polígono de presiones correspondiente al trozo de bóveda comprendi doentre los dos meridianos o'm y o'm'.

Fuerza primera U. Para calcular la intensidad y posición de esta fuerza llamemos X la distancia del centro de gravedad de la plantilla BCLK al eje OP de la bóveda y Ω su area. El volúmen de la bóveda que consideramos será

$$\Omega . X . \hat{A}.$$

y su peso $\Pi . \Omega . X . \hat{A} = U.$

La posición de la vertical de este peso se hallará descomponiendo la superficie Ω en elementos que llamaremos σ.

Designando por x la distancia de los centros de gravedad de esta superficie σ al eje OP de la bóveda y por X_1 la distancia del centro de gravedad de la bóveda al mismo eje, tendremos que:

$$\Pi . \Omega . X . \hat{A} . X_1 = \Sigma \, \sigma . x . \hat{A} . x_1 \, \Pi$$

Pero viendo que las dos distancias x y x_1 son casi iguales, podremos escribir que

$$\Omega . X . X_1 . = \Sigma \ \sigma x^2 = \Omega \ r^2 + \Omega \ X^2$$

de donde se deduce que

$$X_1 = \frac{r^2 + X^2}{X} = X \left(1 + \frac{r^2}{X^2}\right)$$

Como el radio de inercia r es muy pequeño en relación á la distancia X vemos que $\left(\frac{r}{X}\right)^2$ será despreciable ante la unidad. Luego podremos considerar que $\quad X_1 = X$

y por tanto, que la vertical $\underline{U}$ del peso de la bóveda podria admitirse que pasara por el punto G' centro de gravedad de la plantilla.

Queda pues conocida la fuerza U y la situación de su línea de acción.

Fuerza segunda V.- La componente vertical V procede del peso del anillo superior comprendido entre los planos meridianos que limitan el trozo de bóveda que consideramos. Siendo $F \text{sen.} \alpha$ su valor por unidad de longitud del arco de circunferencia de radio ρ', el que hemos de calcular será

$$V = F. \text{sen} \ \alpha \ . \ \hat{A} \cdot \rho'$$

Sustituyendo $F \text{sen} \alpha$ por su valor hallado

$$F. \text{sen} \ \alpha = \omega \ \Pi \ \frac{\rho}{\rho'}$$ tendremos

$$V = \Pi . \omega . \rho . A$$

Componiendo ahora las dos fuerzas verticales calculadas $\quad U = \Pi . \Omega . X . A \quad$ y $\quad V = \Pi \ \omega . \rho . A$

colocaremos la resultante T para descomponerla despues en las direcciones N y SI y deducir el el valor de estas dos reacciones que serán las fuerzas extremas del polígono de presiones.